目　　录

第一章 集合 关系

本章介绍一些必要的预备知识，包括集合（§1.1）、映射（§1.2）、关系（§1.3）等基本概念及其性质，进而讨论等价关系与集合的分类（§1.4），最后介绍选择公理（§1.5）.

§1.1 集 合

所谓一个**集合**是指具有某一特定性质的事物（或对象）的全体．这是数学上的一个最基本的概念，通常只用它的各种同义语来解释，而不用比它更简单的概念来定义.

组成一个集合的每个事物（或对象）叫做这个集合的**元素**（简称**元**）.

一般用大写拉丁字母A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母a，b，c，…表示元素．若a是集合A的一个元素，则说a属于A（或者A包含a），记作$a\in A$（或者$A\ni a$）．若a不是集合A的元素，则说a不属于A（或者A不包含a），记作$a\overline{\in} A$（或者$A\overline{\ni} a$）.

所谓给定一个集合，就是规定这个集合由哪些元素组成．通常的方式有两种，一是列举出这个集合的全部元素，二是给出该集合的元素所具有的特征性质．例如

$$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

表示由1，2，3，4，5五个数字组成的集合，

$$B=\{x \mid x\text{是整数，且}x\geqslant 4\}$$

表示由大于或等于4的所有整数组成的集合．当写出若干个元素就可以看出该集合的组成规律时，可用"…"表示其余的元素．例如

$$\mathrm{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$$

表示由全体自然数组成的集合，

$$\mathrm{Z}=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \cdots\}$$

表示由全体整数组成的集合．

只含有限多个元素的集合叫做**有限集**；否则，称为**无限集**．例如上面的A是有限集，B，N及Z都是无限集．

不含任何元素的集合叫做**空集合**（简称**空集**），记作$\varnothing$．例如集合

$$\{x \mid x\in \mathrm{Z},\ \text{且}x^2=11\}$$

就是一个空集合．

若集合A与集合B所包含的元素完全一样（即$x\in A\Longleftrightarrow x\in B$），则$A$与$B$实质上表示的是同一个集合，这时说$A$和$B$为**集合相等**，记作$A=B$．

若集合B的每一个元素都属于集合A，则称B是A的**子集**（或者A是B的**扩集**），记作$B\subseteq A$（或者$A\supseteq B$），读做"B含于A"（或者"A包含B"）；否则，就说B不是A的子集，记作$B\nsubseteq A$（或者$A\nsupseteq B$）．

空集合$\varnothing$被认为是任何一个集合的子集．

若B是A的子集，但$A\neq B$，则称B是A的**真子集**，记作$B\subset A$（或者$A\supset B$）．

根据定义，对任意集合A和B，显然有

$$A\subseteq B\Longleftrightarrow \forall x\in A,\ \text{必有}x\in B;$$

$$A \subsetneqq B \Longleftrightarrow \exists x \in A, \text{ 使得 } x \overline{\in} B;$$

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A.$$

下面介绍集合的几种运算。

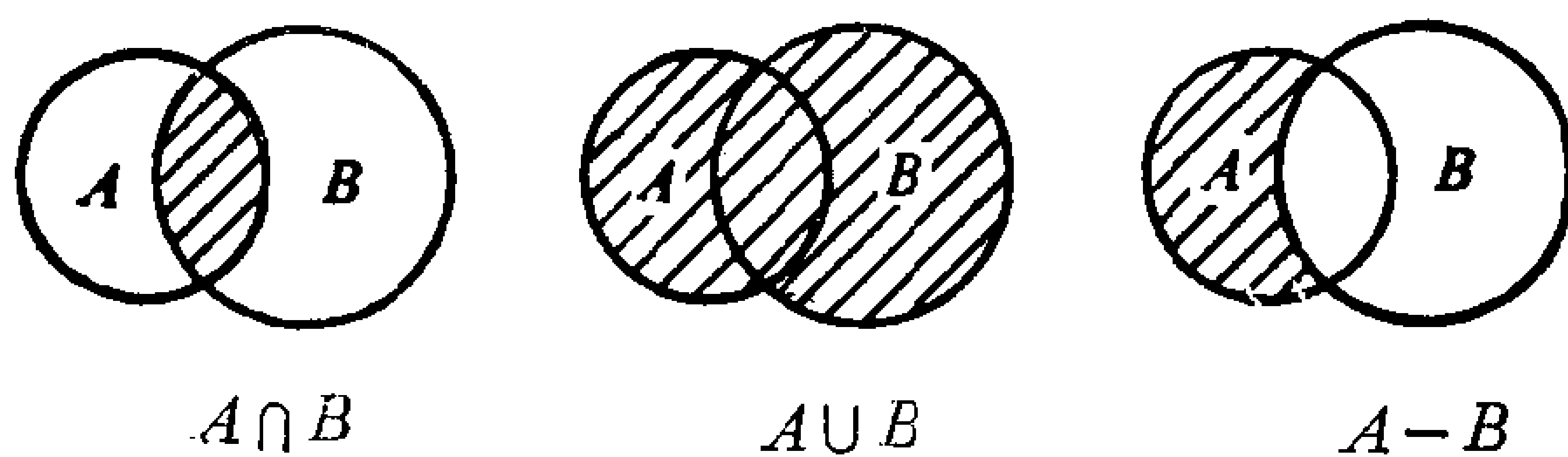
给定集合A与B. 由一切既属于A又属于B的元素组成的集合叫做A与B的**交集**(或**交**)，记作$A \cap B$；由一切属于A或者属于B的元素组成的集合叫做A与B的**并集**(或**并**)，记作$A \cup B$；由一切属于A但不属于B的元素组成的集合叫做A与B的**差集**(或**差**)，记作$A-B$，特别，若B是A的子集，则差集$A-B$叫做B在A内的**余集**(或**补集**)，记作B'_A(在不致于混淆时，也可简记为B')。即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \overline{\in} B\}.$$

集合的这三种运算可用图形表示如下：



$A \cap B$　　　$A \cup B$　　　$A-B$

图 1.1.1

集合的运算满足以下算律：

定理1　任意给定集合A, B, C, 则有

(1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;(幂等律)

(2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;(交换律)

(3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;(结合律)

(4) $A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A$；(吸收律)

(5) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；(分配律)

(6) 若$A\subseteq C$，则$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$；(模律)

若A，B是X的子集，则

(7) $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$,

$A\cap X=A$，$A\cup X=X$；(泛界)

(8) $A\cap A'=\varnothing$，$A\cup A'=X$；(互补性)

(9) $(A')'=A$；(对合律)

(10) $(A\cap B)'=A'\cup B'$，$(A\cup B)'=A'\cap B'$.

(De Morgan律)

其中余集皆指在X内的余集.

证 我们仅证(5)、(10)中的第一式，其余留作练习.

设$x\in A\cap(B\cup C)$，则$x\in A$且$x\in B\cup C$. 由$x\in B\cup C$知$x\in B$或者$x\in C$. 再由$x\in A$知$x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$，即$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 反之，设$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则$x\in A\cap B$或者$x\in A\cap C$，即$x\in A$且$x\in B$或者$x\in A$且$x\in C$. 无论哪种情况，均有$x\in A$且$x\in B\cup C$，即$x\in A\cap(B\cup C)$. 因此(5)中第一式成立.

设$x\in(A\cap B)'$，则$x\in X$，但$x\overline{\in}A\cap B$. 由$x\overline{\in}A\cap B$知$x\overline{\in}A$或者$x\overline{\in}B$. 再由$x\in X$知$x\in A'$或者$x\in B'$，即$x\in A'\cup B'$. 反之，设$x\in A'\cup B'$，则$x\in A'$或$x\in B'$. 由$x\in A'$知$x\in X$且$x\overline{\in}A$；由$x\in B'$知$x\in X$且$x\overline{\in}B$. 无论哪种情况，均有$x\in X$且$x\overline{\in}A\cap B$，即$x\in(A\cap B)'$. 因此(10)中第一式成立. ∎

设A，B是两个集合，若$A\cap B=\varnothing$，则说A与B不相

交.

集合的交、并概念可以推广到任意多个集合上去. 给定一族集合$A_i(i\in I$, I是下标集), 定义集合族$\{A_i|i\in I\}$的交为

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{x|\ \forall i\in I,\ x\in A_i\},$$

集合族$\{A_i|i\in I\}$的并为

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{x|\ \exists i\in I,\ x\in A_i\}.$$

当下标集$I=\{1, 2, \cdots, n\}$是有限集时, 上述交、并也可记作

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

若下标集$I=\varnothing$是空集时, 规定

$$\bigcap_{i\in I} A_i=X,\qquad \bigcup_{i\in I} A_i=\varnothing,$$

其中X表示在我们讨论的范围内, 由所有的对象组成的集合(称为**万有集合**).

多个集合的交、并满足以下算律:

定理2 设$\{A_i|i\in I\}$是任意集合族, I是下标集,

(1)若$I_t(t\in T)$是I的子集, 且$I=\bigcup_{t\in T} I_t$, 则

$$\bigcap_{t\in T}(\bigcap_{i\in I_t} A_i)=\bigcap_{i\in I} A_i,\qquad \bigcup_{t\in T}(\bigcup_{i\in I_t} A_i)=\bigcup_{i\in I} A_i;$$

(一般结合律)

(2)若A是任意集合, 则

$$A\cap(\bigcup_{i\in I} A_i)=\bigcup_{i\in I}(A\cap A_i),$$

$$A\cup(\bigcap_{i\in I} A_i)=\bigcap_{i\in I}(A\cup A_i);$$

(无限分配律)

(3)设X是万有集合, 余集皆指在X内的余集, 则

$$(\bigcap_{i\in I} A_i)' = \bigcup_{i\in I} A_i', \quad (\bigcup_{i\in I} A_i)' = \bigcap_{i\in I} A_i'.$$

(De Morgan律)

证明留作练习. ▌

由集合A的所有子集组成的集合叫做A的**幂集**，记作$P(A)$(或2^A)，即

$$P(A)=\{B \mid B\subseteq A\}.$$

例如设$A=\{a, b, c\}$，则

$$P(A)=\{\varnothing, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\},$$

包含$2^3=8$个元素(即A的子集)．一般地，n元有限集的幂集所含元素的个数为

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

设A_1，A_2，$\cdots$，A_n是任意n个集合，由所有的有序元素组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ $(a_i\in A_i, 1\leqslant i\leqslant n)$组成的集合叫做$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$的**笛卡尔积**(或者**加氏积**)，记作$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ (简记为$\prod_{i=1}^{n} A_i$)，即

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots, n\}.$$

其中两个元素$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$与$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$说是相等(记为$(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$)当且仅当$a_i=b_i$，$i=1, 2, \cdots, n$，即对应的分量相同．例如在一个平面上取定直角坐标系后，每个点可用它的坐标表示，这时该平面上所有点的集合可以看作是实数集R和自身作的加氏积

$$\mathrm{R}\times\mathrm{R}=\{(x, y) \mid x\in\mathrm{R}, y\in\mathrm{R}\}.$$

集合的笛卡尔积的概念可以推广到任意(无限)多个集合

上去.

练　习

1. 设$A=\{x\mid x\in \mathrm{R},|x|\geqslant 5\}$,$B=\{x\mid x\in \mathrm{R},-6\leqslant x<0\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$，$B-A$，并用图形表示.

2. 证明：对任意集合A，B，

(1) $A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cup B=B\Longleftrightarrow A\cap B=A$；

(2) $A=B\Longleftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

3. 设$A=\{x\mid x\in Z,\ x^2-3x+2=0\}$，写出$P(A)$.

4. 若A，B是两个集合，称$(A-B)\cup(B-A)$为A与B的**对称差**. 证明：

$$(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B).$$

5. 补证本节定理1和定理2.

§1.2　映射　代数运算

设A，B是给定的两个集合，所谓A到B的一个**映射**是指一个对应法则φ，使得对于每一个$a\in A$，依此法则唯一确定一个$a'\in B$与之对应. a'叫做a在φ下的**象**，记作$\varphi(a)$；a叫做a'的一个**原象**(或者**逆象**). A叫做φ的**定义域**，B叫做φ的**值域**. 上述事实通常记作

$$\varphi:\ A\longrightarrow B,$$
$$a\longmapsto a'$$

其中$a\mapsto a'$(或$\varphi(a)=a'$)表示具体的对应法则，a代表A中任意元素.

若$S\subseteq A$，称B的子集

$$\varphi(S)=\{\varphi(a)\mid a\in S\}$$

为S在φ下的**象**．特别，称$\varphi(A)$为映射φ的象，记作$\mathrm{Im}\varphi$．若$T\subseteq B$，称A的子集

$$\varphi^{-1}(T)=\{x\mid x\in A\ 且\ \varphi(x)\in T\}$$

为T在φ下的**完全原象**．当T只含一个元素t时（这时$T=\{t\}$叫做**单元集**），则$\varphi^{-1}(\{t\})$简记为$\varphi^{-1}(t)$．对任意的$T\subseteq B$，显然有

$$\varphi^{-1}(T)=\bigcup_{t\in T}\varphi^{-1}(t).$$

φ：$A\to B$与ψ：$C\to D$称为**映射相等**（记作$\varphi=\psi$）当且仅当$A=C$，$B=D$且$\varphi(a)=\psi(a)$，$\forall a\in A$.

例1 设$A=\{a, b, c\}$，$B=\{1, 2, 3, 4\}$，则

$$f: a\mapsto 1,\ b\mapsto 1,\ c\mapsto 2$$

是A到B的映射，且$\mathrm{Im}f=f(A)=\{1, 2\}$，$f^{-1}(1)=\{a, b\}$．但

$$g: a\mapsto 1,\ b\mapsto 2$$

不是A到B的映射，因为c在g作用下没有象．

例2 设$A=\mathrm{Z}$（整数集），$B=\mathrm{N}$（自然数集），则

$$\varphi: n\mapsto |n|+1 \quad 与 \quad \psi: n\mapsto\sqrt{n^2}+1$$

都是A到B的映射，并且$\varphi=\psi$．但

$$\lambda: n\mapsto |n|$$

不是A到B的映射，因为$0\in A$在λ作用下的象不在B中．

例3 设$A=B=\mathrm{Z}$（整数集），则

$$\varphi: n\mapsto n+1 \quad 与 \quad \psi: n\mapsto 2n$$

都是A到B的映射，但是$\varphi\neq\psi$.

例4 设A是任意集合，则

$$1_A: a\mapsto a \quad (\forall a\in A)$$

是A到A的一个映射，叫做A上的**单位映射**（或者**恒等映射**）.

设φ是A到B的一个映射，若$a\neq b$时必有$\varphi(a)\neq\varphi(b)$，$\forall a, b\in A$，则称φ是A到B的一个**单射**，记作φ：$A\rightarrowtail B$；若对任意$b\in B$，均存在$a\in A$，使$\varphi(a)=b$，则称φ为A到B的一个**满射**，记作φ：$A\twoheadrightarrow B$；若φ既是单射，又是满射，则称φ为**双射**（或者**一一映射**），记作φ：$A\longleftrightarrow B$．易见φ是单射当且仅当$\forall b\in B$，$\varphi^{-1}(b)$是单元集或空集；φ是满射当且仅当$\mathrm{Im}\varphi=B$.

例1中的f既不是单射，也不是满射；例2中的φ与ψ是满射，但不是单射；例3中的ψ是单射，但不是满射；例4中的1_A与例3中的φ皆为双射.

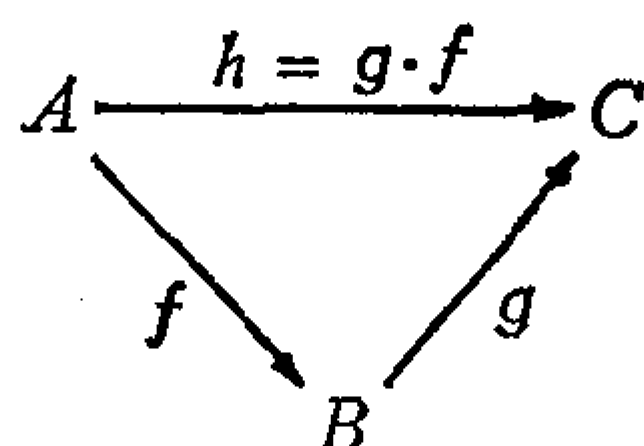


图 1.2.1

给定集合A,B,C及映射f：$A\to B$，g：$B\to C$，由f，g确定A到C的一个映射

$$h:\ A\longrightarrow C$$
$$a\mapsto g(f(a))$$

叫做f与g的**映射合成**，记作$h=g\cdot f$（或gf），即$h(a)=g(f(a))$，$\forall a\in A$．h可用图1.2.1表示.

映射的合成具有以下性质：

定理1 设f：$A\to B$，g：$B\to C$，h：$C\to D$，则有

(1) $h\cdot(g\cdot f)=(h\cdot g)\cdot f$；

(2) $f\cdot 1_A=f$，$1_B\cdot f=f$.

证 (1)显然$h\cdot(g\cdot f)$与$(h\cdot g)\cdot f$有相同的定义域A和值域D，并且对任意的$a\in A$，

$$(h\cdot(g\cdot f))(a)=h((g\cdot f)(a))=h(g(f(a))),$$

$$= (h\cdot g)(f(a)) = ((h\cdot g)\cdot f)(a),$$

因此　$h\cdot(g\cdot f) = (h\cdot g)\cdot f$.

(2) $f\cdot 1_A$与f的定义域均为A，值域均为B，并且对于任意的$a\in A$，

$$(f\cdot 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a),$$

因此$f\cdot 1_A = f$. 同理可证$1_B\cdot f = f$. ∎

设f：$A\to B$，若存在g：$B\to A$，使$g\cdot f = 1_A$，则称f是**左可逆**的，g叫做f的**左逆映射**；若$f\cdot g = 1_B$，则称f是**右可逆**的，g叫做f的**右逆映射**；若f既是左可逆的，又是右可逆的，则称f是**可逆**的.

若f：$A\to B$是可逆的，g，g'分别是f的左逆映射和右逆映射. 由定义知$g\cdot f = 1_A$，$f\cdot g' = 1_B$，于是有

$$g' = 1_A\cdot g' = (g\cdot f)\cdot g' = g\cdot(f\cdot g') = g\cdot 1_B = g.$$

因此f的左、右逆映射相等且唯一，称此唯一的映射为f的**逆映射**，记作f^{-1}. 显然有

$$f^{-1}\cdot f = 1_A,\qquad f\cdot f^{-1} = 1_B,\qquad (f^{-1})^{-1} = f.$$

若f：$A\to B$仅是左可逆的（或右可逆的），则f的左逆映射（右逆映射）未必唯一.

下面的定理给出了（左、右）可逆映射的等价条件.

定理2　给定映射f：$A\to B$，则

(1) f是左可逆的$\Longleftrightarrow f$是单射；

(2) f是右可逆的$\Longleftrightarrow f$是满射；

(3) f是可逆的$\Longleftrightarrow f$是双射.

证　(1) 设f是左可逆的，即存在g：$B\to A$，使$g\cdot f = 1_A$. 若有a_1，$a_2\in A$，$f(a_1) = f(a_2)$，则有

$$a_1 = 1_A(a_1) = (g\cdot f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2))$$

$$=(g\cdot f)(a_2)=1_A(a_2)=a_2,$$

因此f是单射．反之，设f是单射，取定一个元素$a_0\in A$，定义映射g：$B\to A$，使得对任意$b\in B$，

$$g(b)=\begin{cases}a, & 若\exists a\in A, 使f(a)=b,\\ a_0, & 若b\in B-f(A).\end{cases}$$

则$g\cdot f=1_A$，即f是左可逆的．

(2)设f是右可逆的，即存在g：$B\to A$，使得$f\cdot g=1_B$．对任意$b\in B$，有$b=1_B(b)=(f\cdot g)(b)=f(g(b))$，$g(b)\in A$，因此$f$是满射．反之，设$f$是满射，则对任意$b\in B$，$f^{-1}(b)\neq\varnothing$．取定一个元素$a_b\in f^{-1}(b)$，并令$g$：$b\mapsto a_b$，则$g$是$B$到$A$的一个映射，并且$f\cdot g=1_B$，因此$f$是右可逆的．

由(1)和(2)直接可得(3)．▌

利用映射概念可把集合的笛卡尔积推广到任意多个集合上去．先考查两个集合A_1，A_2的笛卡尔积$A_1\times A_2$，$I=\{1,2\}$是下标集．对于每一个$(a_1,a_2)\in A_1\times A_2$，唯一确定$I$到$A_1\cup A_2$的一个映射$f$，满足$f(1)=a_1\in A_1$，$f(2)=a_2\in A_2$．反之，对于每一个映射$f$：$I\to A_1\cup A_2$，满足$f(1)\in A_1$，$f(2)\in A_2$，则唯一确定$A_1\times A_2$中一个元素$(a_1,a_2)$，其中$a_1=f(1)$，$a_2=f(2)$．因此满足上述性质的映射同$A_1\times A_2$的元素之间存在着一一对应．我们自然地可把集合的笛卡尔积推广如下：

设$\{A_i\mid i\in I\}$是集合族，$I\neq\varnothing$是下标集(有限或无限)．定义诸$A_i(i\in I)$的笛卡尔积(或加氏积)为集合

$$\{f\mid f: I\to\bigcup_{i\in I}A_i, 满足f(i)\in A_i, \ \forall i\in I\},$$

记作$\prod_{i\in I}A_i$．

显然$f\in\prod_{i\in I}A_i$完全由它的象$\{f(i)\mid i\in I\}$所确定．若令a_i

$=f(i)$，我们常把f同集$\{a_i \mid i\in I\}$等同看待．这样当$I=\{1, 2, \cdots, n\}$是有限集时，上述定义同§1.1中的定义是一致的．特别，若有某一个$A_i=\varnothing(i\in I)$，则$\prod_{i\in I}A_i=\varnothing$．

利用笛卡尔积可以表述并证明集合的交、并运算满足完全分配律．

定理3 给定集合族$\{A_{i,j_i} \mid i\in I, j_i\in T_i\}$，$I$与$T_i(i\in I)$是下标集，则有

(1) $\bigcap_{i\in I}\{\bigcup_{j\in T_i}A_{i,j}\}=\bigcup\{\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)} \mid f\in\prod_{i\in I}T_i\}$；

(2) $\bigcup_{i\in I}\{\bigcap_{j\in T_i}A_{i,j}\}=\bigcap\{\bigcup_{i\in I}A_{i,f(i)} \mid f\in\prod_{i\in I}T_i\}$．

证 (1)设$x\in\bigcap_{i\in I}\{\bigcup_{j\in T_i}A_{i,j}\}$，则$\forall i\in I$，$x\in\bigcup_{j\in T_i}A_{i,j}$，因此存在$j_i\in T_i$(取定)，使$x\in A_{i,j_i}$．令$f$：$i\mapsto j_i(\forall i\in I)$，则

$$f\in\prod_{i\in I}T_i \quad 且 \quad x\in\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)}.$$

于是
$$x\in\bigcup\{\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)} \mid f\in\prod_{i\in I}T_i\}.$$

反之，设

$$x\in\bigcup\{\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)} \mid f\in\prod_{i\in I}T_i\},$$

则存在$f\in\prod_{i\in I}T_i$，使$x\in\bigcap_{i\in I}A_{i,f(i)}$，因此对任意$i\in I$，

$$x\in A_{i,f(i)}\subseteq\bigcup_{j\in T_i}A_{i,j},$$

于是
$$x\in\bigcap_{i\in I}\{\bigcup_{j\in T_i}A_{i,j}\}.$$
故(1)成立．

(2)的证明留作练习．∎

下面我们介绍代数运算的概念．

设A是一个非空集合，$A\times A$到A的一个映射f叫做A的

一个**代数运算**，即对于A中任意两个元a，b，唯一确定一个元$c\in A$，使$f(a, b)=c$，可记为$a\cdot b=c$(或$ab=c$)．

例5 设Q表示有理数集合，则通常数的加法、减法、乘法都是Q的代数运算．但除法不是Q的代数运算，因为零不能做除数．

例6 设A是任意集合，则集合的交、并都是A的幂集$P(A)$的代数运算．

代数运算的概念还可以扩充．设A是一个非空集合，n是自然数，$A\times A\times\cdots\times A$($n$个$A$的加氏积)到$A$的映射$f$叫做$A$的一个$n$元运算．

带有若干个(n元)运算的非空集合A称为一个代数系统(或代数系)．若"$\cdot$"，"$*$"是A的二个运算，则代数系A通常记作$(A, \cdot, *)$．

例如上面例5、例6中，(Q, $+$, $-$, $\times$)和$(P(A), \cap, \cup, ')$都是代数系．群(半群)是带有一个代数运算的代数系，环(域)是带有两个代数运算的代数系．

练　　习

1．设f：$A\to B$，证明：

(1)对任意$X\subseteq A$，$Y\subseteq B$，有

$$f^{-1}(f(X))\supseteq X,\quad f(f^{-1}(Y))\subseteq Y;$$

(2)对A的任意一个子集族$\{X_i \mid i\in I\}$，有

$$f(\bigcup_{i\in I}X_i)=\bigcup_{i\in I}f(X_i),\quad f(\bigcap_{i\in I}X_i)\subseteq\bigcap_{i\in I}f(X_i);$$

(3)对B的任意一个子集族$\{Y_i \mid i\in I\}$，有

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I}Y_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(Y_i),\quad f^{-1}(\bigcap_{i\in I}Y_i)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(Y_i).$$

2．设f：$A\to B$，g：$B\to C$，证明：

(1) 若f，g均为单射(满射)，则$g \cdot f$为单射(满射)；

(2) 若$g \cdot f$为单射(满射)，则f为单射(g为满射)．

3．举例说明若f：$A \to B$是左可逆的(右可逆的)，其左逆映射(右逆映射)未必唯一．

4．补证本节定理3．

§1.3 关　　系

本节介绍一个比映射更广泛的概念——关系．

给定n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$(n是自然数)，称加氏积$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$的子集$R$为集合$A_1$，$A_2$，…，$A_n$间的一个**$n$元关系**．若$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in R$($a_i \in A_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$)，则称有序元素组$a_1$，$a_2$，…，$a_n$具有关系$R$，记作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)R$；否则，就说$a_1$，$a_2$，…，$a_n$不具有关系$R$，记作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\bar{R}$．

特别，当$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$时，则称$R$为集合$A$上的一个$n$元关系．今后我们讨论最多的是集合$A$上的二元关系．若$R$是$A$上的一个二元关系(即$R \subseteq A \times A$)，$(a_1, a_2)R$也可记作$a_1 R a_2$，$(a_1, a_2)\bar{R}$也可记作$a_1 \bar{R} a_2$．显然对任意的$a, b \in A$，或者$aRb$，或者$a\bar{R}b$，二者必有一个且仅有一个成立．

例1　设$A = \mathrm{R}$（实数集），$R_1 = \{(a, b) | a, b \in \mathrm{R}$，且$b - a > 0\}$，$R_2 = \{(a, b) | a, b \in \mathrm{R}, a^2 + b^2 \leqslant 1\}$，则$R_1$与$R_2$都是实数集R上的二元关系．对任意$a, b \in \mathrm{R}$，$aR_1b$当且仅当$a < b$；$aR_2b$当且仅当平面上的点$(a, b)$位于单位圆内(包括边界)．

二元关系常可用一图形明确表示出来，例如上例中R_1，R_2可由图1.3.1表示。

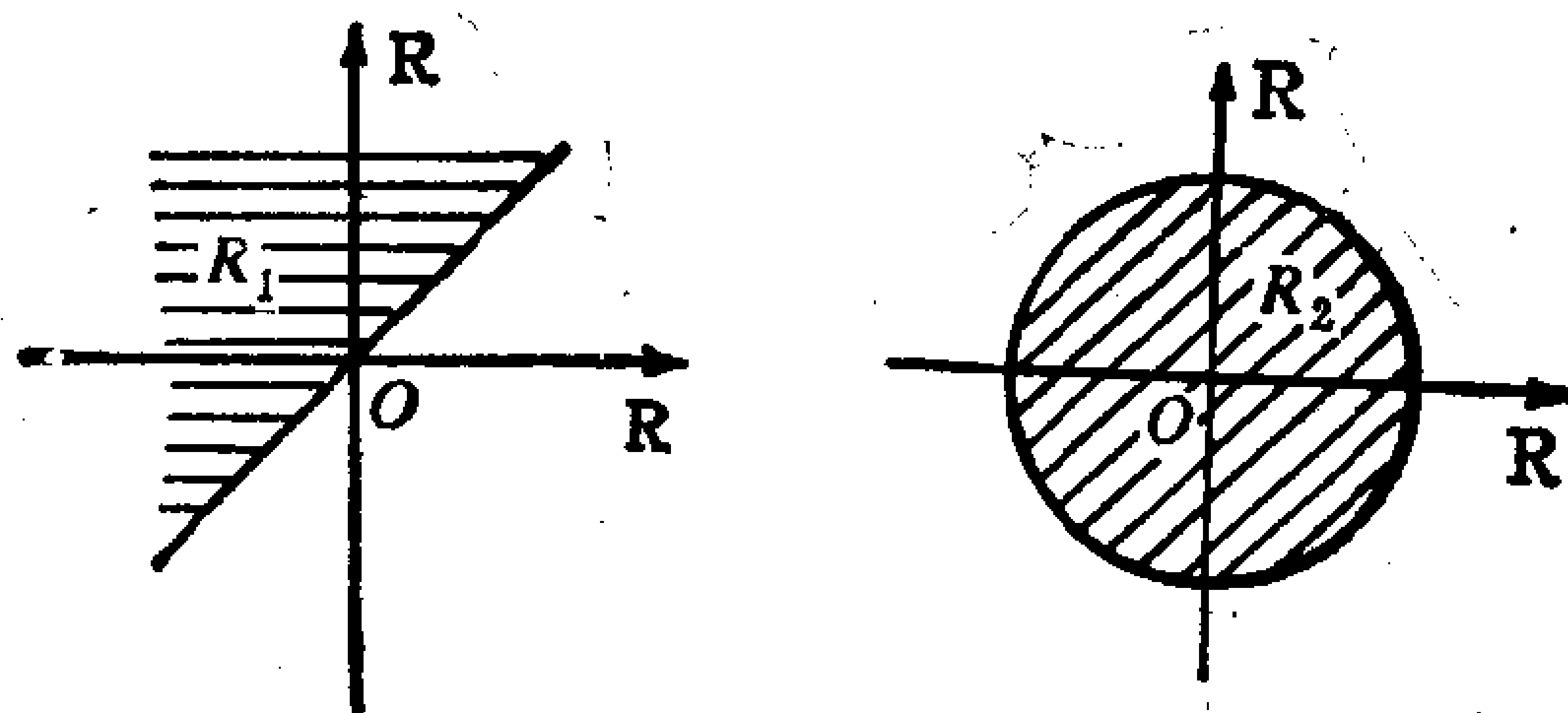


图 1.3.1

例2 对于任意集合A，令$U=A\times A$，$E=\{(a,\ a)\mid a\in A\}$，$\Phi=\varnothing$，则U，E，Φ均是A上的二元关系．其中U叫做集合A上的**全关系**，E叫做集合A上的**恒等关系**，Φ叫做集合A上的**空关系**．对任意的a，$b\in A$，显然有aUb，$a\bar{\Phi}b$，并且aEb当且仅当$a=b$．

例3 给定映射f：$A\to B$，令

$$R=\{(a,\ b)\mid a\in A,\ b\in B,\ 且b=f(a)\},$$

则R是A，B间的一个二元关系，并且有下述性质：

（＊） $\forall a\in A$：$\exists|\,b\in B$，使得aRb．

反之，若A，B间的一个二元关系R具有性质（＊），规定f：$a\mapsto b(a\in A,\ b\in B且aRb)$，则$f$是$A$到$B$的一个映射．

由例3可知集合A到集合B的映射f同A，B间的具有性质（＊）的二元关系R相互唯一确定，甚至我们可以把f同它决定的二元关系R等同起来．因此利用“关系”这一概念可以给出映射的又一定义：

给定集合A与B，A到B的一个映射是指A，B间的一个具有性质（＊）的二元关系R．若$aRb(a\in A,\ b\in B)$，则记作$R(a)=b$，称b为a在R下的象，a叫做b的一个原象（或逆象）．

特别，依此定义，集合A上的n元运算是指A上一个$n+1$

元关系R，具有性质：

(**)　$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n \in A$：$\exists | b \in A$，使得$(a_1, a_2, \cdots, a_n, b)R$.

下面我们着重讨论集合A上的二元关系.

设R是A上的一个二元关系，R可能具有一些特殊性质，常见到的有：

Ⅰ　若xRy，yRz，则xRz；(传递性)

Ⅱ　若xRy，zRy，则xRz；(右可比性)

Ⅲ　若yRx，yRz，则xRz；(左可比性)

Ⅳ　若yRx，zRy，则xRz；(逆传递性)

Ⅴ　$\forall x \in A$：$\exists y \in A$，使xRy；(左全性)

Ⅵ　$\forall y \in A$：$\exists x \in A$，使xRy；(右全性)

Ⅶ　$\forall x \in A$：xRx；(自反性)

Ⅷ　若xRy，则yRx；(对称性)

Ⅸ　若xRy，yRx，则$x=y$.（反对称性）

在这些性质之间，存在一定的逻辑联系.

定理1　设R是集合A上的二元关系，则

(1) Ⅱ与Ⅴ（或Ⅲ与Ⅵ）蕴涵Ⅶ；

(2) Ⅱ与Ⅶ（或Ⅲ与Ⅶ）蕴涵Ⅷ；

(3) Ⅱ与Ⅷ蕴涵Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ，

　　Ⅲ与Ⅷ蕴涵Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ；

(4) Ⅳ与Ⅶ蕴涵Ⅰ、Ⅷ.

证　设Ⅱ与Ⅴ成立，任取$x \in A$，由Ⅴ知存在$y \in A$使xRy，再由Ⅱ(取$z=x$)得xRx，即Ⅶ成立．同理，由Ⅲ与Ⅵ可得Ⅶ，因此(1)成立．设Ⅱ与Ⅶ成立，若xRy (x，$y \in A$)，由Ⅶ知yRy，再由Ⅱ得yRx，即Ⅷ成立．同理，由Ⅲ与

Ⅶ也可得Ⅷ，故(2)成立．设Ⅱ与Ⅷ成立．若xRy且yRz(x，y，$z\in A$)，由Ⅷ知xRy且zRy，再由Ⅱ得xRz，即Ⅰ成立；若yRx且yRz，由Ⅷ知xRy且yRz，再由Ⅱ得xRz，即Ⅲ成立；若yRx且zRy，由Ⅷ知xRy且zRy，再由Ⅱ得xRz，即Ⅳ成立．同理证Ⅲ与Ⅷ蕴涵Ⅰ，Ⅱ，Ⅳ，即(3)成立．设Ⅳ与Ⅶ成立．若xRy，由Ⅶ知yRy，再由Ⅳ得yRx，即Ⅷ成立；若xRy且yRz，由Ⅷ知yRx且zRy，再由Ⅳ得xRz，即Ⅰ成立．因此(4)得证．▌

下面的定理刻划了一类重要的二元关系．

定理2 设R是集合A上的二元关系，则下述条件等价：

(1)R满足Ⅱ，Ⅴ；

(2)R满足Ⅲ，Ⅵ；

(3)R满足Ⅰ，Ⅶ，Ⅷ．

证 由定理1易见(1)蕴涵(3)．反之，设(3)成立．若xRy且zRy，由Ⅷ知xRy且yRz，再由Ⅰ得xRz，即Ⅱ成立．由Ⅶ显然可得Ⅴ，于是(1)成立．故(1)与(3)等价．同理证(2)与(3)等价．▌

最后我们讨论二元关系的运算．

设R，T是集合A上的二元关系．作为加氏积$A\times A$的子集，自然可以考虑R，T的交集$R\cap T$，并集$R\cup T$及R在$A\times A$内的余集R'．它们也是A的二元关系，分别称作R与T的**交关系**(简称**交**)、**并关系**(简称**并**)及R的**余关系**或**补关系**(简称**余**或**补**)．若$R\subseteq T$，则称二元关系R含于T(或T包含R)．若$R=T$，则称R与T是**相等关系**．

下述事实是显然的：

1) $a(R\cap T)b\Longleftrightarrow aRb$ 且 aTb，

$a(R\cup T)b \Longleftrightarrow aRb$ 或 aTb；$(\forall a,\ b\in A)$

2) $R\subseteq T \Longleftrightarrow \forall a,\ b\in A,\ aRb$蕴含$aTb$,

$R=T \Longleftrightarrow R\subseteq T$ 且 $T\subseteq R$；

3) $aR'b \Longleftrightarrow a\bar{R}b$，$(\forall a,\ b\in A)$

$R\cup R'=U$(全关系)，$R\cap R'=\Phi$(空关系).

二元关系的交、并运算也可以推广到任意多个二元关系上去，并且相应于集合运算的诸性质(§1.1)在这里均成立.

下面定义二元关系的积，它是映射合成概念的推广.

设R，T是集合A上的二元关系，所谓R与T的**关系积**，记作RT，是指如下定义的A上的一个二元关系：

$\forall x,\ y\in A,\ x(RT)y \Longleftrightarrow \exists z\in A$，使$xRz$且$zTy$.

关系积具有下述性质：

定理3 设R，S，T是集合A上的二元关系，E，Φ分别是A上的恒等关系及空关系，则

(1) $RE=ER=R$，$R\Phi=\Phi R=\Phi$；

(2) $(RS)T=R(ST)$；(结合律)

(3) 当$R\subseteq S$时，$RT\subseteq ST$，$TR\subseteq TS$；(保序性)

(4) 若$\{T_i\mid i\in I\}$是集合A上的二元关系族，则

$$R(\bigcup_{i\in I}T_i)=\bigcup_{i\in I}RT_i,\ (\bigcup_{i\in I}T_i)R=\bigcup_{i\in I}T_iR.\ (分配性)$$

证 只证(2)与(4)中第一式，其余留作练习.

设$x((RS)T)y$，$(x,\ y\in A)$. 存在$z\in A$，使$x(RS)z$且zTy. 由$x(RS)z$知存在$z'\in A$，使xRz'且$z'Sz$. 因此xRz'且$z'(ST)y$，即$x(R(ST))y$，于是$(RS)T\subseteq R(ST)$. 同理证$R(ST)\subseteq(RS)T$，故(2)成立.

设$x(R(\bigcup_{i\in I}T_i))y$，$(x,\ y\in A)$. 存在$z\in A$，使得$xRz$且$z(\bigcup_{i\in I}T_i)y$. 于是存在$i_0\in I$，满足$zT_{i_0}y$，从而

$$x(RT_{i_0})y,\ \text{即}\quad x(\bigcup_{i\in I}RT_i)y,.$$

因此 $$R(\bigcup_{i\in I}T_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}RT_i.$$

类似可证 $$\bigcup_{i\in I}RT_i\subseteq R(\bigcup_{i\in I}T_i),$$

故 $$R(\bigcup_{i\in I}T_i)=\bigcup_{i\in I}RT_i.\ ▮$$

注 (1)关系积未必满足交换律，即一般地，$RT\neq TR$；(2)定理3(4)中的“$\cup$”换成“$\cap$”，等式未必成立.

逆映射的概念也可以推广到二元关系上来.

设R是集合A上的二元关系，所谓R的**逆关系**，记作R^{-1}(简称R的逆)，是指如下定义的A上一个二元关系：

$$\forall x,\ y\in A,\ xR^{-1}y\Longleftrightarrow yRx.$$

显然，$E^{-1}=E$，$\Phi^{-1}=\Phi$，$(R^{-1})^{-1}=R$. 容易证明下述结果：

定理4 设R，T，$T_i(i\in I)$是集合A上的二元关系，则有

(1) $R\subseteq T\Longleftrightarrow R^{-1}\subseteq T^{-1}$；

(2) $(RT)^{-1}=T^{-1}R^{-1}$；

(3) $(\bigcap_{i\in I}T_i)^{-1}=\bigcap_{i\in I}T_i^{-1}$，$(\bigcup_{i\in I}T_i)^{-1}=\bigcup_{i\in I}T_i^{-1}$.

证 只证(2)与(3)中第一式，其余留作练习.

设$x(RT)^{-1}y$，$(x,\ y\in A)$，则$y(RT)x$,即存在$z\in A$，使yRz且zTx. 于是$xT^{-1}z$且$zR^{-1}y$，从而$x(T^{-1}R^{-1})y$，即$(RT)^{-1}\subseteq T^{-1}R^{-1}$. 类似可证$T^{-1}R^{-1}\subseteq(RT)^{-1}$，故(2)成立.

设$x(\bigcap_{i\in I}T_i)^{-1}y$，$(x,\ y\in A)$，则$y(\bigcap_{i\in I}T_i)x$，即对任意$i\in I$，$yT_ix$，因此$xT_i^{-1}y$，从而

$$x(\bigcap_{i\in I}T_i^{-1})y,\ \text{即}\quad(\bigcap_{i\in I}T_i)^{-1}\subseteq\bigcap_{i\in I}T_i^{-1}.$$

类似可证$\bigcap_{i\in I}T_i^{-1}\subseteq(\bigcap_{i\in I}T_i)^{-1}$，故$(\bigcap_{i\in I}T_i)^{-1}=\bigcap_{i\in I}T_i^{-1}$. (3)也可

由(1)直接证得。▌

利用关系运算，可以描述关系的各种性质.

定理5 设R是集合A上的二元关系，E是恒等关系，则有：

(1) R是传递的(逆传递的)$\Longleftrightarrow RR\subseteq R(RR\subseteq R^{-1})$；

(2) R是右(左)可比的$\Longleftrightarrow RR^{-1}\subseteq R(R^{-1}R\subseteq R)$；

(3) R是左全的(右全的)$\Longleftrightarrow E\subseteq RR^{-1}(E\subseteq R^{-1}R)$；

(4) R是对称的(反对称的)

$\Longleftrightarrow R=R^{-1}(R\cap R^{-1}\subseteq E)$；

(5) R是自反的$\Longleftrightarrow E\subseteq R$；

(6) R是A的映射$\Longleftrightarrow R^{-1}R\subseteq E\subseteq RR^{-1}$；

(7) R是A的可逆映射$\Longleftrightarrow R^{-1}R=RR^{-1}=E$.

证明留给读者. ▌

练　习

1. 设R_1，R_2是自然数集N上的二元关系：

$$R_1=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in \mathrm{N},\ a-b\geqslant 0\},$$

$$R_2=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in \mathrm{N},\ a\text{整除}b(\text{即}a\mid b)\}.$$

证明R_1与R_2满足性质Ⅰ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅸ.

2. 设n是一个自然数，R是整数集Z上的二元关系：

$$aRb\Longleftrightarrow n\mid a-b,\ \forall a,\ b\in \mathrm{Z}.$$

证明R满足定理2所述诸条性质.（R叫做**模n同余关系**，aRb常记作$a\equiv b\pmod n$.）

3. 补证本节定理3、定理4及定理5.

4. 举例说明关系积未必满足交换律.

5. 举例说明定理3(4)中将“$\cup$”换成“$\cap$”，等式未必

成立.

6.设R是集合A上的二元关系，N是A的子集. 令$R^N = R\cap(N\times N)$，则R^N是N上的一个二元关系，称之为R在N上的**诱导关系**. 证明：

(1) $(R^N)^{-1}=(R^{-1})^N$；

(2) 若$\{R_i \mid i\in I\}$是A的二元关系族，则有

$$(\bigcap_{i\in I} R_i)^N=\bigcap_{i\in I} R_i^N,\quad (\bigcup_{i\in I} R_i)^N=\bigcup_{i\in I} R_i^N.$$

§1.4 等价关系与集合的分类

设A是一个集合，A上的一个二元关系R叫做一个**等价关系**，如果满足

1) 自反性：aRa，$(\forall a\in A)$

2) 对称性：$aRb\Rightarrow bRa$，$(\forall a, b\in A)$

3) 传递性：aRb，$bRc\Rightarrow aRc$，$(\forall a, b, c\in A)$.

在§1.3定理2中曾给出了等价关系的不同刻划.

例1 集合A上的恒等关系E及全关系U是A的等价关系.

例2 复数集C上的等模关系D(即$\alpha D\beta\Longleftrightarrow|\alpha|=|\beta|$，$\forall \alpha, \beta\in$ C)是C的等价关系.

例3 整数集Z上的模n同余关系(见§1.3练习2)是Z的一个等价关系.

例4 自然数集N上的“大于或等于”关系及“整除”关系(即§1.3练习1中的R_1和R_2)不是N的等价关系.

所谓集合A的一个**分类**，是指A的一个子集族$\pi(A)=\{A_i \mid A_i\subseteq A, A_i\neq\varnothing, i\in I\}$，满足

1) $A=\bigcup_{i\in I}A_i$;

2) 若$A_i\neq A_j(\forall i,j\in I)$，则$A_i\cap A_j=\varnothing$.

$\pi(A)$中的每一个元素(即A的子集)叫做一个**类**，每个类中任意一个元素叫做该类的一个**代表元**.

例5 在复数集C中，令A_a表示模长为a(a为非负实数)的所有复数组成的集合，则

$$\pi(\mathrm{C})=\{A_a|a\text{是非负实数}\}$$

是C的一个分类. 其中每一个类A_a(在复平面上)就是以原点为中心、半径为a的圆周上的所有点(复数)组成的集合. 圆周上任何一个点(复数)都可作为A_a的代表元.

等价关系同集合的分类有密切的联系.

定理1 设$\sim$是集合A的一个等价关系，对任意$a\in A$，令$[a]=\{x|x\in A,\ x\sim a\}$，则

$$\pi_\sim(A)=\{[a]|a\in A\}$$

是A的一个分类.

证 由于$\sim$是等价关系，由自反性知$a\in[a]$，即$[a]\neq\varnothing(\forall a\in A)$，因此$A=\bigcup_{a\in A}[a]$. 若$[a]\cap[b]\neq\varnothing$，则存在$c\in A$,使得$c\sim a$且$c\sim b$. 由对称性及传递性可知$a\sim b,b\sim a$. 于是$[a]=[b]$. 故$\pi_\sim(A)$是$A$的一个分类. ▌

在以上定理中，由等价关系$\sim$确定的A的分类$\pi_\sim(A)$叫做A对于等价关系$\sim$的**商集**，记作$A/\sim$. A的子集$[a]$(即$A/\sim$的元素)叫做由a确定的**等价类**(或a所在的等价类). 称映射

$$\nu:\quad A\to A/\sim$$
$$a\mapsto[a]$$

是A到商集$A/\sim$上的**自然映射**. 易见，自然映射一定是满

射。

反之，集合的一个分类也可以确定一个等价关系.

定理2 设$\pi(A)$是集合A的一个分类，如下规定A上一个二元关系$\sim_\pi$：

$\forall a, b\in A$，$a\sim_\pi b \Longleftrightarrow a, b$属于$\pi(A)$中的同一类，

则$\sim_\pi$是A的等价关系.

证 显然$\sim_\pi$满足自反性、对称性及传递性，因此$\sim_\pi$是A的一个等价关系. ▌

由定理1可知，等价关系$\sim_\pi$确定A的一个分类$\pi_{\sim_\pi}(A)$，容易验证$\pi(A)$同$\pi_{\sim_\pi}(A)$是一致的. 反之，由A的一个等价关系$\sim$出发，依定理1确定A的一个分类$\pi_\sim(A)$，再依定理2，$\pi_\sim(A)$确定A的一个等价关系$\sim_{\pi_\sim}$，容易验证$\sim$同$\sim_{\pi_\sim}$是一致的. 因此集合A上的所有分类同A上的所有等价关系之间存在着一一对应.

例6 设$\sim$是整数集Z的模n同余关系(n为取定的自然数)，则由$\sim$决定的Z的分类(即商集$Z/\sim$)包含n个不同的等价类，即

$$Z/\sim=\{[0], [1], [2], \cdots, [n-1]\}.$$

其中$[k]=\{an+k\mid a\in Z\}$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$. 反之，由上述分类$Z/\sim$(依定理2)决定的Z的等价关系就是模$n$同余关系.

映射同等价关系、集合的分类也有密切的联系.

定理3 设φ是集合A到集合B的任一映射，在A中如下定义一个二元关系$\sim_\varphi$：

$$a\sim_\varphi b\Longleftrightarrow\varphi(a)=\varphi(b), \quad (\forall a, b\in A)$$

则 (1) $\sim_\varphi$是A的一个等价关系；

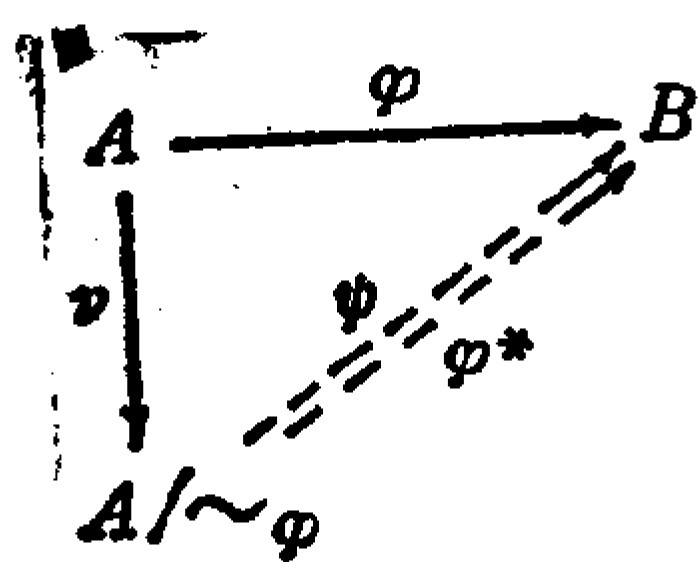


图 1.4.1

(2)若ν是A到商集$A/\sim_\varphi$上的自然映射，则存在唯一的$A/\sim_\varphi$到B的映射φ^*，使得$\varphi^*\nu=\varphi$(见左图).

(3)φ^*是单射，并且当且仅当φ是满射时，φ^*为双射.

证 (1)显然. 为证(2)，首先注意对任意的a，$b\in A$，$[a]=[b]$当且仅当$\varphi(a)=\varphi(b)$. 规定

$$\varphi^*: [a]\mapsto\varphi(a), \quad (\forall a\in A)$$

则易见φ^*定义合理，并且满足$\varphi^*\nu=\varphi$. 若另有$A/\sim_\varphi$到B的映射ψ，适合$\psi\nu=\varphi$，则对任意的$[a]\in A/\sim_\varphi(a\in A)$，有

$$\psi([a])=\psi(\nu(a))=\psi\nu(a)=\varphi(a)=\varphi^*([a]).$$

故$\psi=\varphi^*$，即φ^*是唯一的. 因此(2)成立.

由于$\varphi^*([a])=\varphi^*([b])$(即$\varphi(a)=\varphi(b)$)当且仅当$[a]=[b]$，故$\varphi^*$为单射. 显然，当且仅当$\varphi$为满射时，$\varphi^*$为双射. ▋

通常称上述映射φ^*为φ的**导出映射**.

练　习

1. 在复数集C中，给出例2中等价关系D决定的C的分类(商集)及例5中的分类π(C)决定的C的等价关系.

2. 在整数集Z中，规定二元关系R：

$$aRb\Longleftrightarrow ab>0, \quad (a, b\in Z),$$

R是否Z的等价关系？

3. 在定理3中，证明$\mathrm{Im}\varphi=\mathrm{Im}\varphi^*$，并且$\varphi^*$为满射$\Longleftrightarrow$$\varphi$为满射.

4. 设R，T是集合A的等价关系，证明：

(1) R^{-1}(即R的逆关系)是A的等价关系;

(2) RT是A的等价关系$\Longleftrightarrow RT=TR$.

§1.5 选择公理

我们考虑下面一个问题:

给定一个非空集合A，能否在A的每一个非空子集T中，都选定一个元素$x\in T$? 与这个问题等价的叙述是，如果$\{A_i|i\in I\}$是非空集合族，即$A_i\neq\varnothing$($\forall i\in I$,I是非空下标集)，是否有$\prod\limits_{i\in I}A_i\neq\varnothing$?

上述问题的结论似乎是显而易见的，然而恰恰相反，这一直是集论基础中最困难而有争论的问题之一. 它不能由集合论中通常一些公理推导出来，然而我们又无法避免它，因此把它以公理形式提出来予以承认，称之为选择公理.

选择公理 若$P^*(A)$是集合A($A\neq\varnothing$)的所有非空子集组成的集合，则存在$P^*(A)$到A的一个映射(函数)φ，使得对任意$T\in P^*(A)$，都有$\varphi(T)\in T$.

通常称φ为**选择函数**.

在第二章中，我们将介绍与选择公理等价的几个命题(§2.7).

在可数集(即和自然数集存在一一对应的集)上容易对选择公理给出严格的证明(练习1).

练 习

1. 在自然数集N上证明选择公理.

第二章　偏序集

偏序关系是一类重要的二元关系，带有偏序关系的集合叫做偏序集。本章首先介绍偏序关系、序同态(§2.1)、分次偏序集、Hasse图(§2.2)、维数及上(下)界(§2.3)等基本概念和有关性质，进而讨论Jordan-Dedekind链条件与半模偏序集(§2.4)以及偏序集的基数算术(§2.5)。最后介绍极小条件(§2.6)及等价于选择公理的几个定理(§2.7)。

今后我们常用符号"≤"表示一个二元关系．根据上下文，这同数的小于或等于符号不会造成混淆．

§2.1　偏序集

设P是一个集合，P上的二元关系≤叫做一个**偏序关系**(或**半序关系**)，如果满足

(1)自反性：$a\leqslant a$，$(\forall a\in P)$

(2)反对称性：$a\leqslant b$，$b\leqslant a\Rightarrow a=b$，$(\forall a, b\in P)$

(3)传递性：$a\leqslant b$，$b\leqslant c\Rightarrow a\leqslant c$，$(\forall a, b, c\in P)$．

这时称$(P, \leqslant)$(或简称P)为一个**偏序集**(或**半序集**)．对任意a，$b\in P$，若$a\leqslant b$，则读作"a含于b"或"a小于或等于b"；若$a\leqslant b$而$a\neq b$，则记成$a<b$，读作"a真含于b"或者"a小于b"．称a与b是**可比**的，如果$a\leqslant b$或者$b\leqslant a$；否则就说a与b是**不可比**的，记作$a\parallel b$．

$a\leqslant b(a<b)$有时也记作$b\geqslant a(b>a)$.

例1 设A是任意一个集合，$P(A)$是A的幂集，$\subseteq$是集合的包含关系，则$(P(A),\ \subseteq)$成为一个偏序集.

例2 设N是自然数集，“|”表示数的整除关系，$\leqslant$是通常数的“小于或等于”关系，则$(N,\ |)$与$(N,\ \leqslant)$都是偏序集.

例3 设A是任意集合，E是恒等关系，则$(A,\ E)$是偏序集.

由例2可知，同一个集合可以具有不同的偏序关系，它们应被视为不同的偏序集.

设$(P,\ \leqslant)$是一个偏序集，若P中任意两个不同的元素都是可比的，则称$(P,\ \leqslant)$（简称P）是一个**线性序集**（或**链**，或**全序集**），偏序关系$\leqslant$称为**线性序**（或**全序**）；反之，若P中任意两个不同的元素都不可比，则称$(P,\ \leqslant)$（简称P）是一个**非序集**（或**反链**）.

上面例2中的(N，$\leqslant$)是一个线性序集（即链），例3中的$(A,\ E)$是一个非序集（即反链）.

定理1 设$\leqslant$是集合P上一个偏序关系，N是P的一个子集，则

(1) $\leqslant$的逆关系$\leqslant^{-1}$也是P的一个偏序关系；

(2) $\leqslant$在N上的诱导关系$\leqslant^{N}$（见§1.3 练习 6）是N上的一个偏序关系.

证明留给读者. ▮

在上述定理中，称偏序集$(P,\leqslant^{-1})$是偏序集$(P,\ \leqslant)$的**对偶**，简记作P^{-1}；称偏序集$(N,\ \leqslant^{N})$是偏序集$(P,\ \leqslant)$的**子偏序集**，简记作$(N,\ \leqslant)$或N. 显然，若$(P,\ \leqslant)$是一个链

(或反链)，则其对偶以及子偏序集也是链(或反链)．

设$(P, \leqslant)$是任意一个偏序集，N是P的一个子集，如果子偏序集$(N, \leqslant)$本身是一个链(或反链)，则称N为**P内的链**(或**反链**)．

例如，令$M=\{2^n \mid n=0, 1, 2, \cdots\}$，$W=\{p \mid p$为素数$\}$，则$M$是偏序集$(N, \mid)$(见例2)内的一个链，$W$是$(N, \mid)$内的一个反链．

设$(P, \leqslant)$与$(Q, \leqslant)$是两个偏序集①，称映射θ: $P\to Q$为**序同态**(或**保序**的)，如果满足

(1)　$x\leqslant y \Rightarrow \theta(x)\leqslant\theta(y)$，$(\forall x, y\in P)$，

称θ为**序同构**(或**同构**)，如果θ是双射，并且满足(1)与

(1′)　$\theta(x)\leqslant\theta(y)\Rightarrow x\leqslant y$，$(\forall x, y\in P)$．

显然序同构一定是序同态．当$(P, \leqslant)=(Q, \leqslant)$时，序同态(或序同构)$\theta$叫做偏序集$(P, \leqslant)$的**自同态**(或**自同构**)．若序同态$\theta$: $P\to Q$是满射，则称偏序集P与Q**同态**，记作$P\sim Q$；若θ是序同构，则称P与Q**同构**，记作$P\cong Q$；若P与Q的某一个子偏序集同构，则称偏序集P可**同构嵌入**到偏序集Q中．

设$(A, \leqslant)$是任意一个偏序集，$a\in A$，称A的下述子集

$$(a]=\{x \mid x\in A, x\leqslant a\},$$
$$[a)=\{y \mid y\in A, a\leqslant y\}$$

为由a决定的**截段**．在偏序集$(A, \leqslant)$与偏序集$(P(A), \subseteq)$(见例1)之间定义映射

$$\varphi: a\mapsto(a], (\forall a\in A).$$

---

① P与Q的偏序关系用同一个符号$\leqslant$表示，根据上下文，这不会造成混淆。

易见$a\leqslant b(a, b\in A)$当且仅当$\varphi(a)\subseteq\varphi(b)$. 特别，当$\varphi(a)=\varphi(b)$时，必有$a=b$. 因此$A$与$P(A)$的子偏序集$\varphi(A)=\{(a]\mid a\in A\}$同构，即偏序集$A$可以同构嵌入到偏序集$P(A)$中. 于是我们证明了下述结果：

定理2 任意偏序集$(P, \leqslant)$均可同构嵌入到某个集合A的幂集（对于集合包含关系$\subseteq$）偏序集$(P(A), \subseteq)$中. ▮

上述定理表明，例1给出的幂集偏序集具有特殊的地位.

对偶地，可以定义反序同态及反序同构等概念. 设$(P, \leqslant)$与$(Q, \leqslant)$是两个偏序集，映射θ：$P\to Q$称为**反序同态**（或**反序**的），如果满足

(2) $x\leqslant y\Rightarrow\theta(y)\leqslant\theta(x)$, $(\forall x, y\in P)$;

称θ为**反序同构**（或**对偶同构**），如果θ是双射，并且满足(2)与

(2′) $\theta(y)\leqslant\theta(x)\Rightarrow x\leqslant y$, $(\forall x, y\in P)$,

这时称P与Q是对偶同构（或对偶的）. 若θ：$P\to Q$是对偶同构，并且$(P,\leqslant)=(Q,\leqslant)$，则称$\theta$为$P$的一个**自对偶同构**，并说偏序集$P$是**自对偶**的.

显然，与P^{-1}同构的偏序集一定与P对偶同构. 偏序集在一个反序同构对应下，若不是自对偶，就一定是成对地对偶的. 同样地，关于偏序集的定义和定理，在一个反序同构对应下，若不是自对偶的，就一定是成对地对偶的.

由序同构及反序同构的定义，容易证明下述定理：

定理3 设$(P, \leqslant)$与$(Q,\leqslant)$是两个偏序集，θ：$P\longrightarrow Q$是满射，则下述条件等价：

(1) θ是序同构（反序同构）；

(2) θ 是可逆映射，并且 θ 与 θ^{-1} 皆是保序的(反序的)；

(3) θ 是双保序的(双反序的)，即

$x \leqslant y \Longleftrightarrow \theta(x) \leqslant \theta(y)\ (\theta(y) \leqslant \theta(x))$，$\forall x,\ y \in P$.

证 (1)⇒(2)⇒(3) 显然成立．为证(3)⇒(1)，只需证 θ 是双射．设 $\theta(x)=\theta(y)$，x，$y\in P$，则 $\theta(x)\leqslant\theta(y)$ 且 $\theta(y)\leqslant\theta(x)$．由(3)知 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$，于是 $x=y$，因此 θ 是单射．已知 θ 为满射，故 θ 为双射．█

注 定理3(2)中要求 θ^{-1} 保序(反序)是必须的．存在双射(即可逆映射) θ：$P \longrightarrow Q$，使得 θ 是保序的，但 θ^{-1} 不是保序的，因而 θ 不是序同构(见练习5)．

下面引入一类较偏序关系稍弱的二元关系——拟序关系．

设 $\leqslant$ 是集合 Q 上的二元关系，$\leqslant$ 叫做一个**拟序关系**(简称**拟序**)，如果满足

(1) 自反性：$x\leqslant x$，$(\forall x\in Q)$

(2) 传递性：$x\leqslant y$，$y\leqslant z \Rightarrow x\leqslant z$，$(\forall x,\ y,\ z\in Q)$

这时称 $(Q,\ \leqslant)$(简称 Q)为一个**拟序集**.

显然，偏序关系一定是拟序关系，其逆不真．例如在实数集合R中，定义二元关系 $\leqslant'$：

$$\alpha\leqslant'\beta \Longleftrightarrow |\alpha| \leqslant |\beta|,\ (\forall \alpha,\ \beta\in \mathrm{R})$$

则 $\leqslant'$ 是R中的一个拟序关系，但不是偏序关系．

若 $(Q,\ \leqslant)$ 是一个拟序集，在 Q 中可以适当定义一个等价关系 $\sim$，并且在商集 $Q/\sim$ 中定义一个偏序关系 $\leqslant'$，使得对任意 $[a]$，$[b]\in Q/\sim(a,\ b\in Q)$，$[a]\leqslant'[b]$ 当且仅当 $a\leqslant b$.

定理4 设 $(Q,\ \leqslant)$ 是一个拟序集，在 Q 中如下定义二元

关系～：

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \leqslant y \text{且} y \leqslant x, \quad (\forall x, \ y \in Q)$$

则 (1)～是Q上的一个等价关系；

(2)在商集$Q/\sim$中定义二元关系$\leqslant'$如下：

$$[a] \leqslant' [b] \Longleftrightarrow a \leqslant b, \quad (\forall a, \ b \in Q),$$

则$(Q/\sim, \ \leqslant')$成为一个偏序集．

证 (1)由$\leqslant$是自反的知～也是自反的，由定义知～还是对称的．若$x \sim y$且$y \sim z$ $(x, \ y, \ z \in Q)$ 则$x \leqslant y$，$y \leqslant x$且$y \leqslant z$，$z \leqslant y$．由于$\leqslant$是传递的，因此$x \leqslant z$且$z \leqslant x$，即$x \sim z$，于是～是传递的．故～是Q的一个等价关系．

(2)首先证明$Q/\sim$中规定的二元关系$\leqslant'$是合理的，即与代表元的选取无关．设$[a]=[a']$，$[b]=[b']$$(a, \ a', \ b, \ b' \in Q)$，则$a \sim a'$，$b \sim b'$，即$a \leqslant a'$且$a' \leqslant a$，$b \leqslant b'$且$b' \leqslant b$．由$\leqslant$的传递性可知$a \leqslant b$当且仅当$a' \leqslant b'$，于是有$[a] \leqslant' [b]$当且仅当$[a'] \leqslant' [b']$．因此$Q/\sim$中规定的二元关系$\leqslant'$与代表元的选取无关．其次证明$\leqslant'$是偏序关系．由于$\leqslant$是自反的和传递的，因而$\leqslant'$也是自反的和传递的．若有$[x] \leqslant' [y]$且$[y] \leqslant' [x]$，则$x \leqslant y$且$y \leqslant x$，即$x \sim y$，因此$[x]=[y]$，于是$\leqslant'$是反对称的．故$\leqslant'$是偏序关系．▌

练 习

1.证明：偏序关系满足反循环性，即

若 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_1$，则 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

2.证明：在仅含有二个元素的集合中，恰有三种不同的偏序关系.

3.在偏序集$(P, \leqslant)$中，如下定义二元关系$<$：$x<y \Longleftrightarrow x\leqslant y$且$x\neq y(\forall x, y\in P)$. 证明：$<$满足传递性和反自反性(即不存在$x\in P$,使$x<x$)；反之，若$P$中一个二元关系$<$满足传递性和反自反性，如下定义二元关系$\leqslant$：$x\leqslant y\Longleftrightarrow x<y$或者$x=y$，则$\leqslant$是$P$的一个偏序关系.

4.设$\leqslant$是集合P上的一个二元关系，证明：

(1)$(P, \leqslant)$成为反链$\Longleftrightarrow\leqslant$是$P$的恒等关系.

(2)$(P, \leqslant)$成为链$\Longleftrightarrow \leqslant\cup\leqslant^{-1}=U$(全关系).

5.在例2中，设ε：$n\mapsto n$是自然数集N上的恒等映射. 验证ε是偏序集$(\mathrm{N}, |)$到偏序集$(\mathrm{N}, \leqslant)$上的序同态，但不是序同构.

6.在定理4中，令ψ：$Q\to Q/\sim$是自然映射，则ψ是满射，并且满足：$x\leqslant y \Longleftrightarrow \psi(x)\leqslant'\psi(y)$，但是我们并不能断定$\psi$是双射，为什么？(与定理3(3)的证明作比较.)

§2.2 Hasse图　分次偏序集

设$(P, \leqslant)$是一个偏序集，A是P的一个非空子集，$a\in A$. 若对任意的$x\in A$，有$x\leqslant a$，则称a是A的一个**最大元**；若不存在$y\in A$，使得$a<y(a\neq y)$，则称a是A的一个**极大元**. 对偶地，可以给出**最小元**和**极小元**的定义.

显然最大元(最小元)一定是极大元(极小元)，反之不真.

特别地，偏序集$(P, \leqslant)$的最大元(若存在时)叫做P的**单位元**，用I表示；$(P, \leqslant)$的最小元(若存在时)叫做P的**零元**，用O表示；I，O统称为P的**泛界**.

定理1 设$(P, \leqslant)$是一个偏序集，A是P的一个非空子集.

(1)若A有最大元(最小元)，则只有一个；

(2)若A是有限子集，则必有极大元(极小元)；

(3)若A是P内的**链**(即线性序子集)，则A的极大元(极小元)(当存在时)一定是最大元(最小元).

证 只证(2)，其余留作练习.

设$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，归纳定义$P$中元素列$m_1$，$m_2$，$\cdots$，$m_n$，使得$m_1=a_1$. 假定$m_{k-1}$已经定义$(2\leqslant k\leqslant n)$，规定

$$m_k=\begin{cases}a_k, & 若 m_{k-1}<a_k \\ m_{k-1}, & 否则\end{cases}$$

这样得到一列元素m_1，m_2，$\cdots$，m_n，显然$m_n\in A$是A的一个极大元. 类似可证A有极小元. ▌

偏序集(或链)$(P, \leqslant)$叫做一个**有限偏序集**(或**有限链**)，如果P是有限集；否则称P是一个**无限偏序集**(或**无限链**). 通常P所含元素的个数(基数)用$n(P)$表示，叫做P的**阶**.

由定理1显然可得

推论1 任何有限链一定有最大元(最小元). ▌

设a，b是偏序集$(P, \leqslant)$中任意两个不同的元素. 若$a<b$，且不存在$x\in P$使得$a<x<b$ $(x\neq a, x\neq b)$，则称a是b的一个**下邻**或b是a的一个**上邻**，或者说b**覆盖**a，记作$a\prec b$. 若$a\leqslant b$，则称P的子集$\{x \mid x\in P, a\leqslant x\leqslant b\}$是以$a$，$b$为

端点的(**闭**)**区间**，记作$[a, b]$或b/a. 若$a \prec b$，则称区间$[a, b]$(或b/a)为**素区间**.

当偏序集$(P, \leqslant)$有泛界O或I时，则称O的上邻(若存在时)为P的**原子**(或**点**)；称I的下邻(若存在时)为P的**对偶原子**(或**对偶点**).

定理2 设$(P, \leqslant)$是一个偏序集，$a, b \in P$，$a \neq b$，则

(1)$a \prec b \Longleftrightarrow a \leqslant b$且$[a, b] = \{a, b\}$；

(2)若P是有限偏序集，则$a \leqslant b \Longleftrightarrow$存在有限个元素$x_i \in P(i = 0, 1, \cdots, n)$，使得

$$a = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec x_n = b.$$

证 (1)与(2)的充分性显然成立. 为证(2)的必要性，对区间$[a, b]$所含元素的个数m使用归纳法. 由于$a \leqslant b$，$a \neq b$，显然$m \geqslant 2$. 当$m = 2$时，由(1)可知$a \prec b$，结论成立. 设$m > 2$，并且对于区间所含元素的个数$\leqslant m-1$的情形，结论已经成立，则当区间$[a, b]$所含元素个数等于m时$(m > 2)$，一定存在$c \in P, a \leqslant c \leqslant b$，且$c \neq a, c \neq b$. 易见区间$[a, c]$与区间$[c, b]$所含元素的个数均小于$m$，由归纳假设知存在有限个元素$x_i \in P(i = 0, 1, \cdots, k)$及$y_j \in P(j = k, k+1, \cdots, n)$，使得

$$a = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k = c = y_k \prec y_{k+1} \prec \cdots \prec y_n = b.$$

因此(2)的必要性成立. ∎

由上述定理可知，在有限偏序集$(P, \leqslant)$中，偏序关系$\leqslant$完全由具有覆盖关系的元素对(例如$a \prec b$)所决定. 如果把P中每一个元素都用一个小圆圈在同一平面上表示出来，当且仅当b覆盖a时把b画在a的高处，并用线段将a，b连接起来. 这样得到的图形称为偏序集$(P, \leqslant)$的**示图**，也叫做

Hasse图．利用示图，可以把偏序集中各元素之间的序关系形象地表示出来．

例1 设$M=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$，$|$表示数的整除关系，则$(M, |)$成为一个有限偏序集(可以看作§2.1例2中偏序集$(N, |)$的子偏序集)，其示图由图2.2.1(a)给出．

例2 设$A=\{1, 2, 3\}$，则A的幂集$P(A)$关于集合包含关系$\subseteq$成为一个偏序集$(P(A), \subseteq)$．其中$P(A)$的阶为8，$\varnothing$是零元，A是单位元，单元子集$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$是原子．其示图由图2.2.1(b)给出．

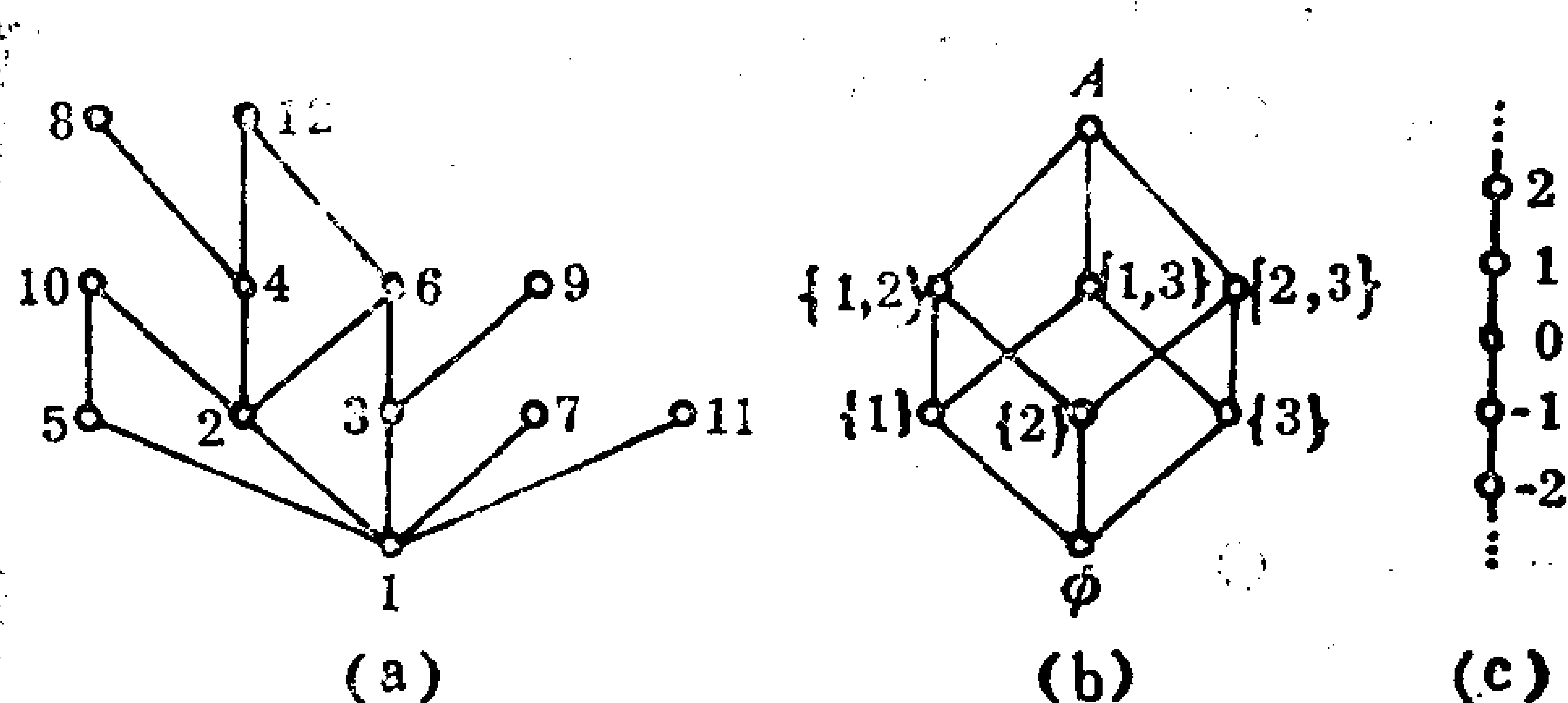


图 2.2.1

有时某些无限偏序集也可用Hasse图表示．例如整数集Z关于自然序(数的小于或等于关系)构成的无限链$(Z, \leqslant)$，其示图可由图2.2.1(c)表示．

关于有限偏序集的示图，显然有以下事实：

(1) $a\leqslant b$当且仅当可沿折线自下而上由a到达b；

(2) 两个有限偏序集同构当且仅当它们可由同一个Hasse图表示；

(3) 偏序集P的对偶P^{-1}的示图可由P的示图上下倒置得

到；

(4) 有限偏序集P自对偶，当且仅当P有一个上下对称的示图．

根据（2），对于每一个确定的自然数n，我们有可能求得所有彼此不同构的n阶偏序集的个数．

例3 所有不同构的3阶偏序集共有5个 其示图由图2.2.2给出，其中有三个是自对偶的．

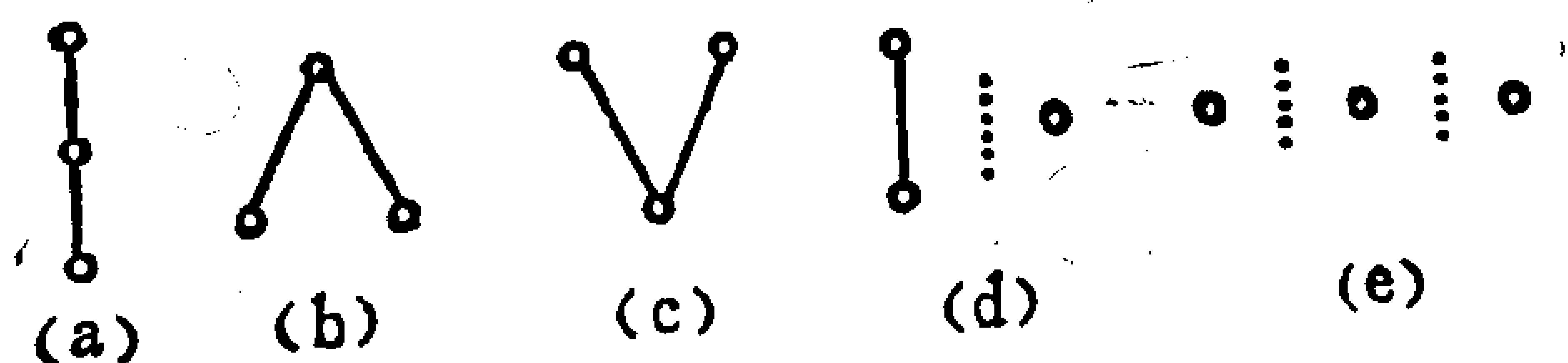


图 2.2.2

例4 设$A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$是前n个自然数构成的集合，则A_n关于自然序($\leqslant_z$)构成一个n阶有限链，称为**序数n的链**，记作$\mathbf{n}$，其示图由图2.2.3(a)给出．由A_n构成的反链叫做基数n的反链，记作n，其示图由图2.2.3(b)给出．

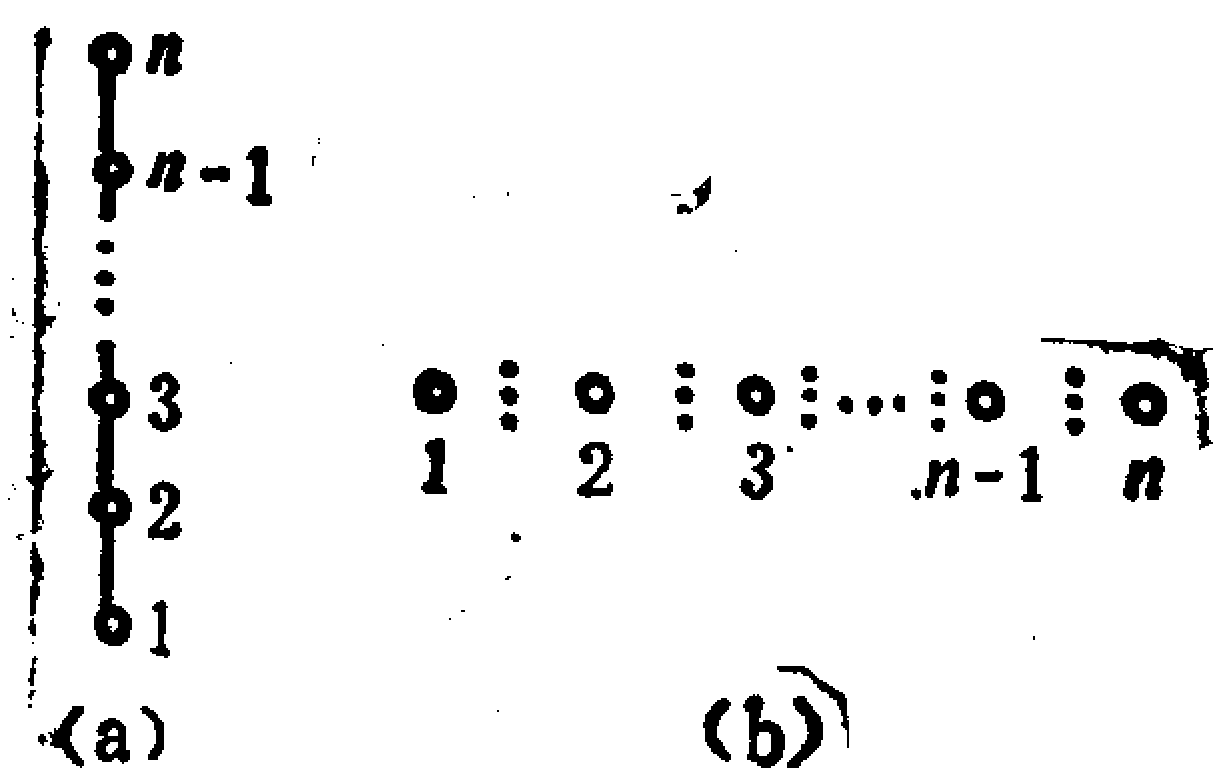


图 2.2.3

不难证明，所有n元有限链(反链)都可以由图2.2.3(a)(图2.2.3(b))表示．因此有

定理3 任何n元有限链(反链)彼此同构．∎

今后我们将用$\mathbf{n}$(或n)表示任意一个n元有限链(或反链)，并且规定n元**有限链$\mathbf{n}$的长**为$n-1$，n元**有限反链n的宽**为n．

规定无限链(反链)的长(宽)为∞.

推论2 **两个有限链(反链)同构当且仅当它们的长(宽)相等.** ▌

设$(P,\leqslant)$是任意一个偏序集.用$l(P)$ $(w(P))$表示所有P内的有限链(反链)的长(宽)的上确界，称为**偏序集P的长(宽)**. 当$l(P)$ $(w(P))$为有限数时，则称P是**有限长**的(**有限宽**的)，否则，称P为**无限长**的(**无限宽**的).

显然有限偏序集一定是有限长的(有限宽的). 例如图2.2.2所表示的5个偏序集的长分别为2,1,1,1,0；宽分别为1,2,2,2,3.

设a,b是偏序集$(P,\leqslant)$中任意两个元素，并且$a\leqslant b$. 子偏序集$[a,b]$的长称为**区间$[a,b]$的长**，也叫做**元素a与b的距离**,记作$l(b/a)$. 若P中任意区间的长都是有限数，则称偏序集P为**相对有限长**；若P中任意界于两个元素a,b间的链($a\leqslant b$)都是有限长的，则称P为**有界有限长**.

由定义，显然有

定理4 任意有限长的偏序集一定是相对有限长的；相对有限长的偏序集一定是有界有限长的. ▌

上述定理的逆是不对的. 图2.2.1(c)表示的无限链是相对有限长的,但不是有限长的；图2.2.4表示的无限偏序集是有界有限长的，但不是相对有限长的.

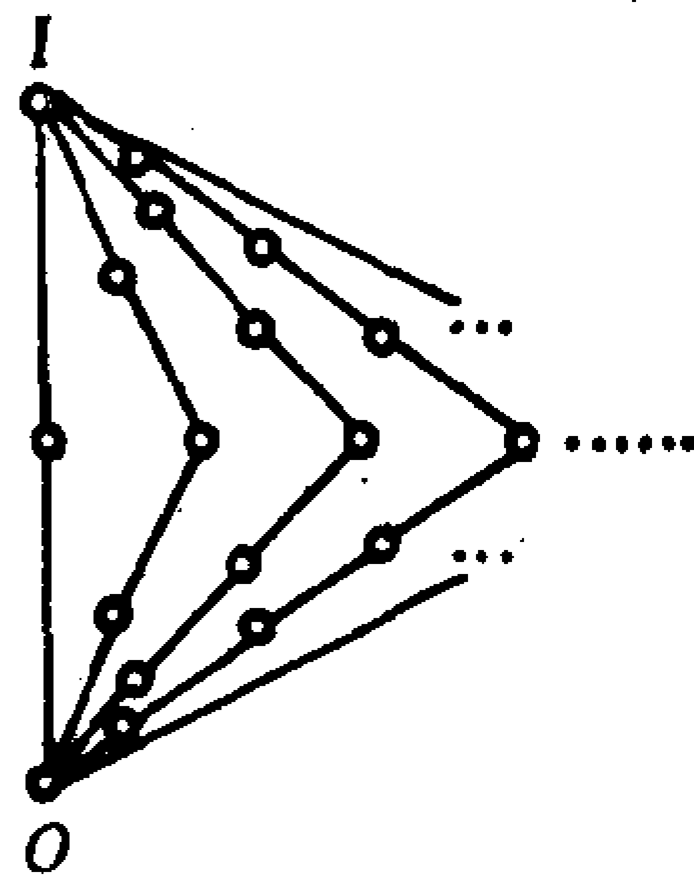


图 2.2.4

下面介绍分次偏序集.

设$(P,\leqslant)$是一个偏序集. 如果存在P到整数集Z的映射

(函数) g: $P\to Z$，满足

G1　$x<y\Rightarrow g(x)<g(y)$，$(\forall x,\ y\in P)$

G2　$x\prec y\Rightarrow g(y)=g(x)+1$，$(\forall x,y\in P)$，

则称P被函数g所**分次**，称g为**分次函数**，P叫做**分次偏序集**.

例如自然数集N(整数集Z)关于自然序$\leqslant_Z$构成的链是分次偏序集，恒等映射ε：$n\mapsto n$是一个分次函数. 本节例1中的偏序集$(M,|)$是一个分次偏序集，其分次函数g：$M\to Z$可定义为：$g(1)=-1$，$g(2)=g(3)=g(5)=g(7)=g(11)=0$，$g(10)=g(4)=g(6)=g(9)=1$，$g(8)=g(12)=2$（参见图2.2.1(a)）.

定理5　分次偏序集一定是有界有限长的.

证　设$(P,\leqslant)$是分次偏序集，g是相应的分次函数. 对任意$a,b\in P$，$a\leqslant b$，由分次偏序集之定义，可知界于a,b之间的任意链的长至多等于$g(b)-g(a)$. 故P是有界有限长的.∎

在§2.4中将进一步证明，分次偏序集一定是相对有限长的.

练　　习

1.证明：所有不同构的4阶偏序集共有16个，其中有8个是自对偶的. 画出它们的示图.

2.说明在有限偏序集的示图中，不可能出现以三个元素为顶点而边上无其它元素的三角形.

3.证明：在偏序集$(P,\leqslant)$中，若$a\leqslant b\leqslant c$，且a与c的距离为有限数，则a与b的距离及b与c的距离均为有限数，且有

$$l(b/a)+l(c/b)\leqslant l(c/a).$$

举例说明上式等号未必成立.

4.举例说明一个分次偏序集的分次函数不是唯一的.

5.举例说明在分次函数的定义中，条件G1与G2是独立的. 即存在偏序集P及映射g：$P\to Z$，适合G1但不适合G2；也存在偏序集Q及映射h：$Q\to Z$，适合G2但不适合G1.

6.证明：若偏序集P有泛界O,I,则P是有限长的$\Longleftrightarrow P$是相对有限长的.

§2.3 维数界

设$(P,\leqslant)$是有零元O的偏序集，$x\in P$. 称x与O的距离为元素x的**维数**或**高度**，记作$h(x)$. 若P中任意元素的维数都是有限数，则称P到Z(整数集)的映射h：$x\mapsto h(x)$为P上的**维数函数**，这时也说在P上维数函数可定义. 若存在一个正整数m，使得对任意$x\in P$，$h(x)\leqslant m$,则称P是**有限维偏序集**；否则叫做**无限维偏序集**.

下述结果显然成立：

定理1 设$(P,\leqslant)$是有零元O的偏序集，则

(1)P是有限维的$\Longleftrightarrow P$是有限长的；

(2)维数函数可定义$\Longleftrightarrow P$是相对有限长的；

(3)$p\in P$是原子$\Longleftrightarrow h(p)=1$；

(4)如果P是有限维的，则对任意$x\in P$，总有$h(x)\leqslant l(P)$，并且存在$y\in P$，使得$h(y)=l(P)$. ▮

通常也把$l(P)$（P有零元O）叫做偏序集P的**维数**. 容易证明，若偏序集P有泛界O,I,则$l(P)=h(I)$. 在任意有限维偏序集P上，维数函数可定义，并且若$x<y\ (x,y\in P)$，必有$h(x)<h(y)$. 即h满足分次函数定义(§2.2)中条件G1,

但未必满足G2．因此维数函数不一定是分次函数．在§2.4中将给出一个使h成为分次函数的充要条件．

设A是偏序集$(P,\leqslant)$的任意子集，$x\in P$．如果对任意$a\in A$，总有$a\leqslant x$，则称x为A在P内的一个**上界**；反之，如果对任意$a\in A$，总有$x\leqslant a$，则称x为A在P内的一个**下界**．A在P内的所有上界组成的集合用M_aA表示；A在P内的所有下界组成的集合用M_tA表示．

由§2.2定理1可知，$M_aA(M_tA)$的最小元(最大元)若是存在，则只能有一个，称之为A在P内的**最小上界**或**上确界**(**最大下界**或**下确界**)，记作$\sup A(\inf A)$．

根据定义显然有

定理2 在偏序集$(P,\leqslant)$中，有

(1) $M_a\varnothing=P$,　　$M_t\varnothing=P$;

(2) $\sup\varnothing$存在$\Longleftrightarrow P$有泛界O(这时$\sup\varnothing=O$)；

$\inf\varnothing$存在$\Longleftrightarrow P$有泛界I(这时$\inf\varnothing=I$)．▌

般地有下述结果：

定理3 设A,B是偏序集$(P,\leqslant)$中任意子集，

(1) 若$A\subseteq B$，则$M_aB\subseteq M_aA$，$M_tB\subseteq M_tA$;

(2) $A\subseteq M_a(M_tA)$，$A\subseteq M_t(M_aA)$;

(3) $M_a(M_t(M_aA))=M_aA$,

$M_t(M_a(M_tA))=M_tA$;

(4) 若A有最大元(最小元)a，则A在P内的上确界(下确界)存在，并且$\sup A=a$ ($\inf A=a$)．

证 只证(2)与(3)，其余留作练习．

设$a\in A$，对任意$x\in M_tA$，x是A的一个下界，因此$x\leqslant a$．于是a是M_tA的一个上界，即$a\in M_a(M_tA)$，所以$A\subseteq$

$M_a(M_tA)$. 同理证$A\subseteq M_t(M_aA)$，从而(2)成立. 特别有$M_aA\subseteq M_a(M_t(M_aA))$，再由(1)知$M_a(M_t(M_aA))\subseteq M_aA$，于是$M_a(M_t(M_aA))=M_aA$. 同理可以证明$M_t(M_a(M_tA))=M_tA$，故(3)成立. ▌

推论1 设A是偏序集$(P,\geqslant)$的任意子集，下述条件等价：

(1) A在P内的上确界(下确界)存在；

(2) $M_aA(M_tA)$在P内的下确界(上确界)存在；

(3) $M_aA\cap M_t(M_aA)\neq\varnothing(M_tA\cap M_a(M_tA)\neq\varnothing)$.

当上述条件之一满足时，有

$$\sup A=M_aA\cap M_t(M_aA)=\inf(M_aA)$$
$$(\inf A=M_tA\cap M_a(M_tA)=\sup(M_tA)).$$

证 (1)⇒(2). 设$b=\sup A$存在，则b是M_aA的最小元，由定理3(4)知$b=\inf(M_aA)$存在.

(2)⇒(3). 设$b=\inf(M_aA)$存在，则b是$M_t(M_aA)$的最大元，由定理3(2)知$A\subseteq M_t(M_aA)$，于是$b\in M_aA$. 因此

$$b\in M_aA\cap M_t(M_aA)，即\quad M_aA\cap M_t(M_aA)\neq\varnothing.$$

(3)⇒(1). 设$M_aA\cap M_t(M_aA)\neq\varnothing$，取$b\in M_aA\cap M_t(M_aA)$，易证$b$是$M_aA$的最小元，故$b=\sup A$存在.

其余结论的证明留给读者. ▌

注 读者应当注意最大元(最小元)、极大元(极小元)、上确界(下确界)等概念的联系与区别. 一般地，在一个偏序集P中，子集A的最大元(最小元)如果存在，一定是A的极大元(极小元)，也是A在P中的上确界(下确界)，但反之不真. A的最大元(最小元)、极大元(极小元)一定属于A，而

A的上确界(下确界)未必在A中.

在偏序集中，求上(下)确界的运算满足一般结合律.

定理4 设$\{Y_i \mid i\in I\}$是偏序集$(P,\leqslant)$的一个子集族(I是下标集)，$Y=\bigcup_{i\in I}Y_i$，若Y与诸Y_i的上(下)确界均存在，则有

$$\sup Y=\sup\ \{\sup Y_i \mid i\in I\}$$
$$(\inf Y=\inf\ \{\inf Y_i \mid i\in I\}).$$

证明留作练习. ▌

定理5 设偏序集$(P,\leqslant)$中每一个非空子集都有下确界(上确界)，A是P的任意子集. 若A在P内至少有一个上界(下界)，则A有上确界(下确界).

证 由假设，$M_aA\neq\varnothing$，因此$b=\inf(M_aA)$存在. 由推论1知$b=\sup A$. ▌

利用定理2可得

推论2 设$(P,\leqslant)$是任意偏序集，则下述条件等价：

(1)P中任意子集(包括$\varnothing$)有上确界；

(2)P中任意子集(包括$\varnothing$)有下确界. ▌

定理6 设$(P,\leqslant)$，$(Q,\leqslant)$是两个偏序集，θ：$P\to Q$是对偶同构，A是P的子集，$b\in P$. 则

(1)b是A的最大(小)元$\Longleftrightarrow\theta(b)$是$\theta(A)$的最小(大)元；

(2)b是A的极大(小)元$\Longleftrightarrow\theta(b)$是$\theta(A)$的极小(大)元；

(3)b是A的上(下)界$\Longleftrightarrow\theta(b)$是$\theta(A)$的下(上)界；

(4)b是A的上(下)确界$\Longleftrightarrow\theta(b)$是$\theta(A)$的下(上)确界；

(5)b是P的单位元(零元)$\Longleftrightarrow\theta(b)$是$Q$的零元(单位元)。

证明留给读者. ▌

根据定理6，显然有下述

对偶原则 若一个关于偏序集的命题在所有偏序集中为真，则其对偶命题（即把其中的偏序代以逆序，最大(小)元代以最小(大)元，极大(小)元代以极小(大)元，上(下)界代以下(上)界，上(下)确界代以下(上)确界，单位元(零元)代以零元(单位元)，等等）亦真.

练　　习

1.求出§2.2例1中偏序集$(M,|)$的诸元素的维数.

2.举例说明在偏序集中，一个子集A的上(下)确界未必属于A.

3.补证本节诸定理及推论.

4.设A是偏序集$(P,\leqslant)$的子集. 若对任意的$a,b\in A$，$a\leqslant b$，总有$[a,b]\subseteq A$，则称A是P的一个**凸子集**. 证明：M_aA，M_iA是P的凸子集.

5.偏序集$(P,\leqslant)$称为**上有向**的(**下有向**的)，如果P中任意二元子集$\{a,b\}$都有一个上界(下界)；P叫做**有向**的，如果P既是上有向的，又是下有向的. 证明：一个上(下)有向偏序集P的极大(小)元如果存在，则是唯一的，并且是P的最大(小)元.

§2.4 J-D链条件　半模偏序集

设$(P,\leqslant)$是一个偏序集，C是P内的一个链. 若对P内的

任意链C'，$C\subseteq C'$，必有$C=C'$，则称C是P**内的极大链**．若C有最大元a，最小元$b(b\leqslant a)$，则称C是**界于a,b间的链**(或**连接a,b的链**)；若D也是界于a,b间的链，并且$C\subseteq D$，则称D是C的一个**加细**；若D是C的一个加细，并且$C\neq D$，则称D是C的一个**真加细**．若C是一个界于a,b间的链，且C无真加细则称C是一个**界于a,b间的极大链**．

显然C是界于a,b间的极大链当且仅当C是子偏序集$[a,b]$内的极大链．

定理1 设C：$b=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=a$是偏序集$(P,\leqslant)$内一个有限链，则

(1)C是界于a,b间的极大链$\Longleftrightarrow x_i\prec x_{i+1}(i=0,1,2,\cdots n-1)$；

(2)C是P内的极大链$\Longleftrightarrow a$是P的极大元，b是P的极小元，并且$x_i\prec x_{i+1}(i=0,1,2,\cdots,n-1)$．

证明留作练习．▌

在上述条件满足时，分别称C是界于a,b间的**有限极大链**或者称C是P内的有限极大链．

下面主要讨论偏序集中连接两个元素的有限极大链的长的唯一性．即所谓的

Jordan-Dedekind**链条件**(简称J-D**链条件**)：界于两个给定端点a，$b(b\leqslant a)$间的所有有限极大链的长都相等．

在一个任意的偏序集中，J-D链条件未必成立，例如§2.2中图2.2.4给出的偏序集就是一例．本节介绍两类满足J-D链条件的偏序集，其一就是分次偏序集(见§2.2)．

定理2 任何分次偏序集都满足J-D链条件．

证 设$(P,\leqslant)$是分次偏序集．g：$P\to Z$是分次函数．

对任意的a，$b\in P$，$b\leqslant a$，若C是界于a，b间的有限极大链，由分次偏序集的定义及定理1知C的长等于$g(a)-g(b)$．当a，b取定时，C的长也是定值．故P满足J-D链条件．▌

对于带有泛界O的有界有限长的偏序集(§2.2)，J-D链条件完全刻划了分次偏序集.

定理3 设$(P,\ \leqslant)$是带泛界O的有界有限长的偏序集，则P满足J-D链条件当且仅当P上维数函数h可定义，并且P被h所分次.

证 由定理2知充分性成立．下证必要性．设P适合J-D链条件．对任意$x\in P$，$O\leqslant x$，由于P是有界有限长的，任何界于x，O间的极大链都是有限极大链，并且其长皆相等．因此x，O间的距离是有限数，故在P上维数函数h可定义．容易验证h适合分次偏序集定义中的条件G1，G2(§2.2)，因此P被h所分次．▌

下述推论显然成立.

推论1 设偏序集$(P,\ \leqslant)$适合J-D链条件，则

(1)对任意a，$b\in P$，$a\leqslant b$，子偏序集$[a,\ b]$也适合J-D链条件；

(2)P是相对有限长的$\Longleftrightarrow P$是有界有限长的.

证明留给读者．▌

上述推论(1)中，将区间$[a,\ b]$换成P的任意一个子偏序集，结论未必成立.

另一类满足J-D链条件的偏序集是所谓的半模偏序集.

设$(P,\ \leqslant)$是一个偏序集．如果对任意a，$b\in P$，$a\neq b$，满足条件

(σ)若存在$c\in P$使a，b同时覆盖c，则存在$d\in P$使d同

时覆盖a与b.

则称P是一个**上半模偏序集**. 对偶地可定义**下半模偏序集**. 若P既是上半模的，又是下半模的，则称P是**模偏序集**.

换言之，偏序集P是上(下)半模的，当且仅当对任意a，$b \in P$，$a \neq b$，若a，b有公共下邻(上邻)，则必有公共上邻(下邻).

例如在图2.4.1中，(a)表示一个上半模偏序集，(b)表示一个下半模偏序集，(c)表示一个模偏序集，(d)表示的偏序集既不是上半模的，又不是下半模的.

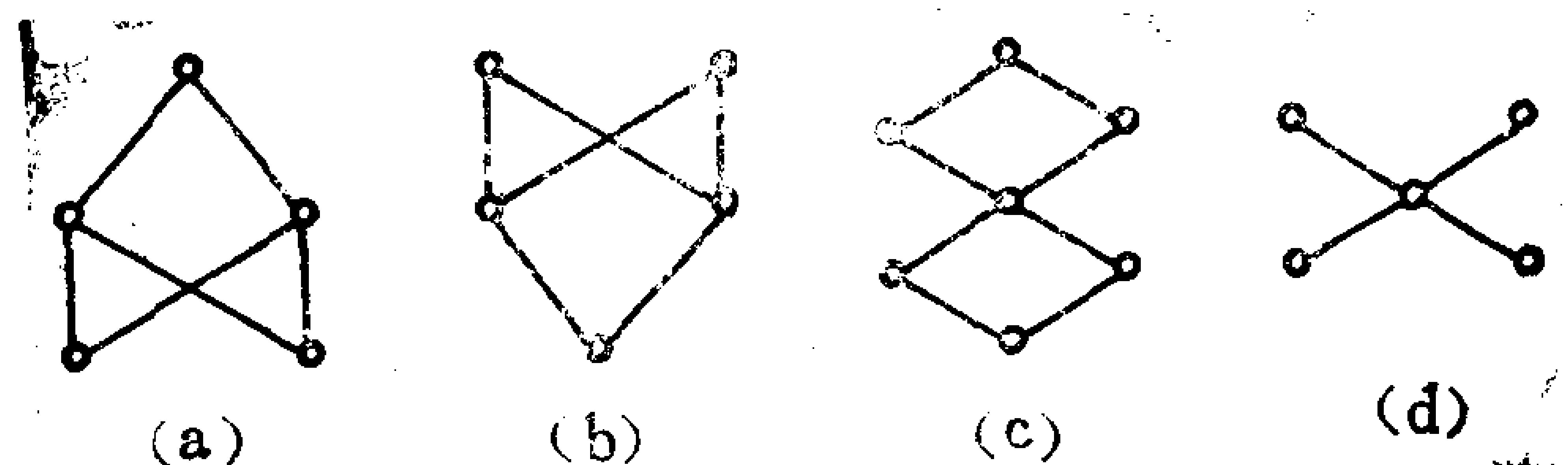


图 2.4.1

上图中(d)可以看作是(c)的子偏序集. 因此上(下)半模偏序集的子偏序集未必是上(下)半模的.

定理4 任何有限长的上(下)半模偏序集满足J-D链条件.

证 设$(P, \leqslant)$是有限长的上半模偏序集. 对连接P中任意两个可比元素的有限极大链的长使用归纳法. 任取a，$b \in P (a \leqslant b)$及连接b，a的两个有限极大链：

$$A:\ a = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n = b,$$

$$B:\ a = y_0 \prec y_1 \prec y_2 \prec \cdots \prec y_m = b.$$

往证$n=m$.

当$n=0$或1时，显然有$m=0$或1，即$n=m$. 假定对于界于两个给定元素的所有链中，存在长小于或等于$n-1$的有限极大链，定理的结论已成立. 对于上述的链A，B，如果$m\neq n$，必有$x_1\neq y_1$(否则，由归纳假设知$n-1=m-1$，矛盾). 由于x_1,y_1有公共下邻$a=x_0=y_0$,因而必有公共上邻x_{11}，并且$x_2\neq x_{11}$(否则，由连接y_1，b的极大链$y_1\prec x_{11}\prec x_2\prec\cdots\prec x_n=b$ 及归纳假设知 $n-1=m-1$，矛盾). 由于x_2与x_{11}有公共下邻x_1，因而必有公共上邻x_{21}，并且$x_3\neq x_{21}$. …如此继续下去，得到一列元素x_{11}，x_{21},…,x_{n1}，使得x_{11}是x_1，y_1的公共上邻，x_{k1}是x_k，$x_{k-1,1}$的公共上邻($k=2$，3，…，n)(见图2.4.2).

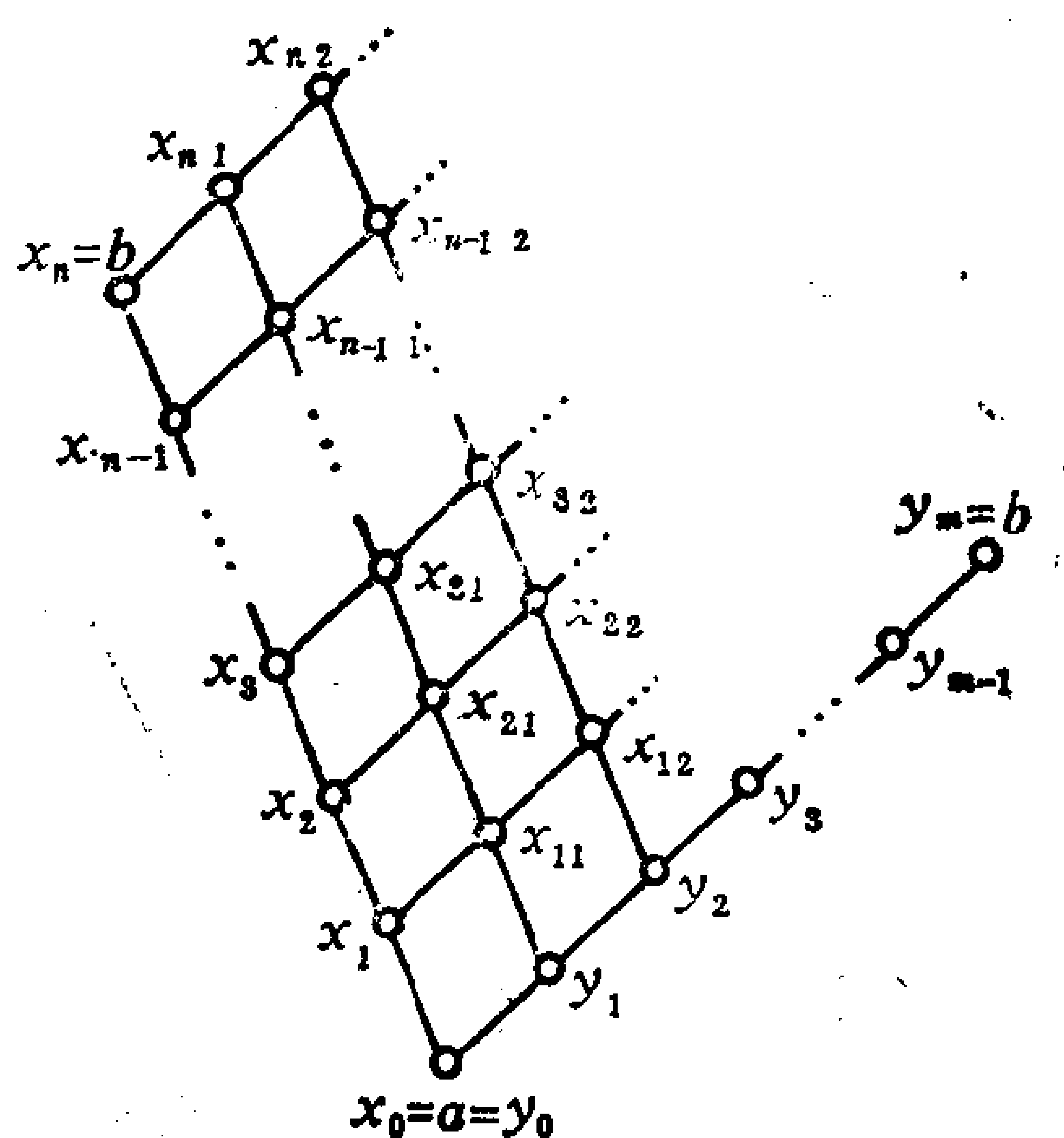


图 2.4.2

因此得到b的一个上邻x_{n1}及界于x_{n1}，y_1间的两个有限极大链:

A_1: $y_1\prec x_{11}\prec\cdots\prec x_{n-1,1}\prec x_{n1}$

B_1: $y_1\prec y_2\prec\cdots\prec y_m=b\prec x_{n1}$.

其中A_1长为n，B_1长为m. 重复上述证明，又可得到一列元素：x_{12}，x_{22}，…，x_{n2}及界于y_2与x_{n2}间的两个有限极大链：

A_2: $y_2\prec x_{12}\prec x_{22}\prec\cdots\prec x_{n-1,2}\prec x_{n2}$,

$$B_2:\ y_2 \prec y_3 \prec \cdots \prec y_m = b \prec x_{n1} \prec x_{n2},$$

其中x_{n2}是x_{n1}的上邻，A_2，B_2的长分别为n，m. 这样继继下去，得到一列元素$b=x_n$，x_{n1}，x_{n2}，…，x_{nk}，…，使得

$$b=x_n \prec x_{n1} \prec x_{n2} \prec \cdots \prec x_{nk} \prec \cdots,$$

此与P是有限长相矛盾，故必有$n=m$，因此P满足J-D链条件. 利用对偶原则可知，对于下半模偏序集，定理亦真. ■

由定理3可得

推论2 带泛界O的有限长上(下)半模偏序集被维数函数所分次. ■

注 (1) 定理 4 的逆不真. 例如图2.4.3(a)所表示的偏序集适合J-D链条件，但不是上(下)半模的.

(2) 定理 4 中条件“有限长”不是必须的，例如图2.4.3(b)所示的偏序集是一个无限长上(下)半模偏序集，并且适合J-D链条件(因为J-D链条件仅要求连接给定元素的有限极大链等长). 其中

$$R=\{r \mid r\text{是有理数，且}\ 0 \leqslant r \leqslant 1\},$$

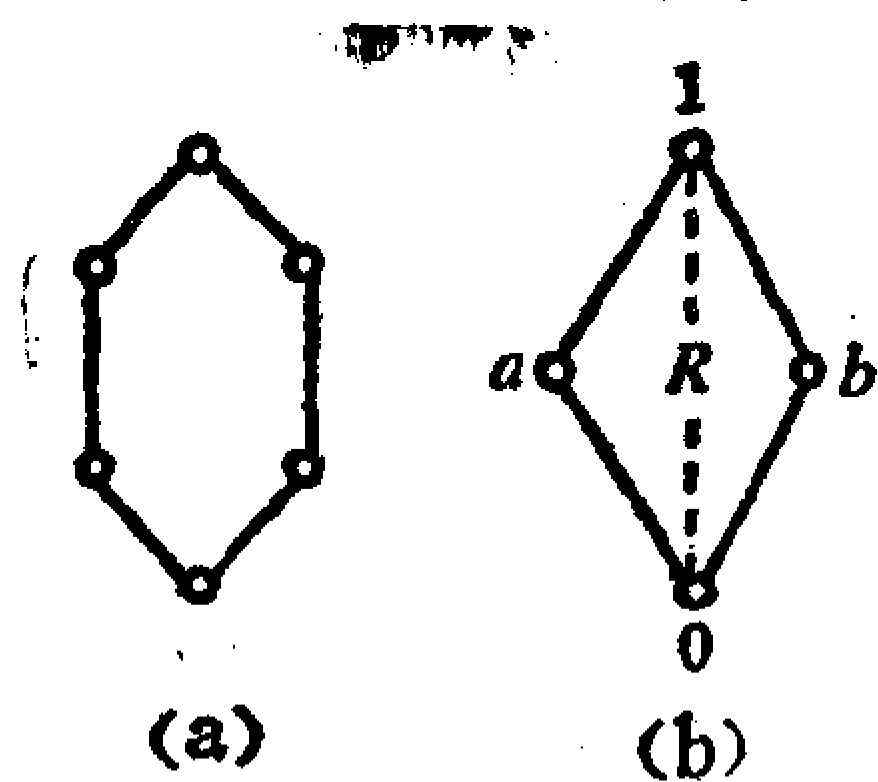


图 2.4.3

a，$b \in R$. 序关系规定为：$0<a<1$，$0<b<1$，$a \parallel b$，$a \parallel x$，$b \parallel x$ $(\forall x \in R)$，R中任意两元素依通常数的大小关系$\leqslant$. 显然R是一个连接1，0的无限链，而1(0)仅有的下邻(上邻)是a，b.

练 习

1. 补证本节定理1与推论1.

2. 举例说明，若偏序集P适合J-D链条件，其子偏序集未必适合.

3. 设$(P, \leqslant)$是一个有界有限长偏序集，并且满足J-D链条件，证明：

(1) P中任意两个可比元素间的距离是有限数；

(2) 若有 $a\leqslant b\leqslant c$，$(a, b, c\in P)$，则

$$l(b/a)+l(c/b)=l(c/a).$$

(比较§2.2练习3).

§2.5 偏序集的基数算术

数的通常算术(如加法、乘法及取幂)可以推广到偏序集上来.

设$(X, \leqslant_X)$，$(Y, \leqslant_Y)$是两个给定的偏序集. 下面应用三种方法构造新的偏序集.

(1) 令$W=X\cup Y$，并且假定$X\cap Y=\varnothing$(否则，可用任何一个与Y同构且与X不交的偏序集代替Y). 在W中如下定义一个二元关系$\leqslant$：

$a\leqslant b\Longleftrightarrow a, b\in X$且$a\leqslant_X b$或$a, b\in Y$且$a\leqslant_Y b$，$(\forall a, b\in W)$.

即W中的二元关系$\leqslant$分别保持了X与Y中原有的偏序关系，而任何$x\in X$与$y\in Y$对于$\leqslant$不可比. 易证$\leqslant$是W上的一个偏序关系. 称偏序集$(W, \leqslant)$是偏序集X与偏序集Y的**基数和**(简称为**和**)，记作$W=X+Y$.

(2) 令$T=X\times Y$(笛卡尔积)，在T中如下定义一个二元关系$\leqslant$：$(x,y)\leqslant(x',y')\Longleftrightarrow x\leqslant_X x'$且$y\leqslant_Y y'$，$(\forall (x,y)$，

$(x', y' \in T)$. 易见$\leqslant$是T上的个一偏序关)系. 称偏序集$(T, \leqslant)$是偏序集X与偏序集Y的**基数积**(简称为**积**)，记作$T = X \times Y$或$T = XY$.

偏序集的基数积可以推广到任意多个偏序集上. 如果$\{(X_i, \leqslant_i) \mid i \in I\}$是偏序集族，$I$是下标集合. 在笛卡尔积$T = \prod_{i \in I} X_i$上定义二元关系$\leqslant$如下：

$$f \leqslant g \Longleftrightarrow f(i) \leqslant_i g(i),\quad \forall i \in I,\ (\forall f,\ g \in T).$$

则$\leqslant$是T上的一个偏序关系，称偏序集$(T, \leqslant)$是偏序集族$\{X_i \mid i \in I\}$的基数积)简称积)，仍记作$T = \prod_{i \in I} X_i$. 特别地，当$I = \{1, 2, \cdots, n\}$是有限集时，可记作

$$T = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \quad 或 \quad T = \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

(3) 令$F = \{f \mid f: X \to Y 是序同态\}$. 在$F$中如下规定一个二元关系$\leqslant$：

$$f \leqslant g \Longleftrightarrow f(x) \leqslant_Y g(x),\quad \forall x \in X,\ (\forall f,\ g \in F).$$

容易验证$\leqslant$是F上的一个偏序关系. 称偏序集$(F, \leqslant)$是偏序集X与偏序集Y的**基数幂**(简称**幂**)，记作$F = Y^X$.

显然，两个有限偏序集的和、积与幂仍然是有限偏序集. 两个上(下)半模偏序集的和与积仍然是上(下)半模偏序集. 两个有限偏序集X与Y的和$X + Y$的示图可由X的示图与Y的示图并列放置得到. 例如图2.5.1中的(a)，(b)，(c)分别表示了两个2元链$\mathbf{2}$的和$(2 + 2)$，积(2×2)与幂(2^2)的示图.

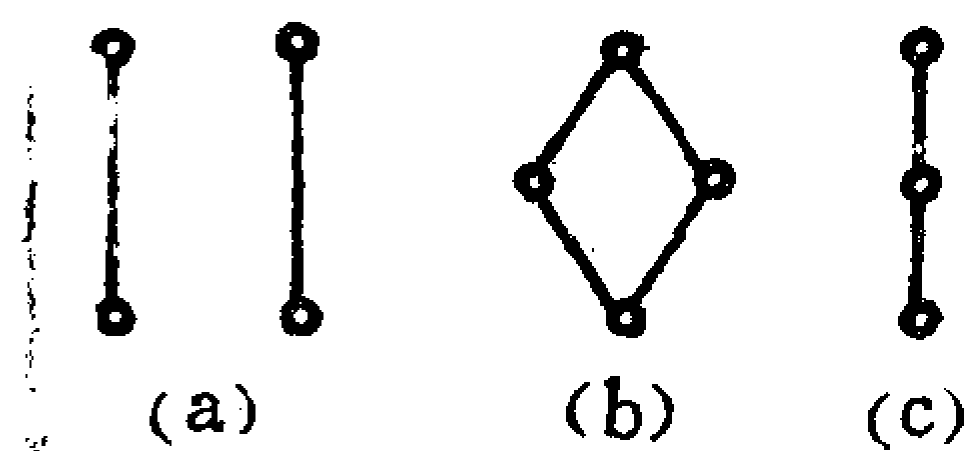


图 2.5.1

偏序集的基数算术具有以下算律：

定理1 设X，Y，Z是任意偏序集，下述恒等式成立（其中等号表示序同构）：

(1) $X+Y=Y+X$，$X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$；

(2) $XY=YX$，$X(YZ)=(XY)Z$；

(3) $X(Y+Z)=XY+XZ$，$(X+Y)Z=XZ+YZ$；

(4) $X^{Y+Z}=X^YX^Z$，$(XY)^Z=X^ZY^Z$，$(X^Y)^Z=X^{YZ}$；

(5) $(X+Y)^{-1}=X^{-1}+Y^{-1}$，$(XY)^{-1}=X^{-1}Y^{-1}$，

$(Y^X)^{-1}=(Y^{-1})^{X^{-1}}$.

证 (1)—(3)留作练习，(5)可由对偶原则得到，下面证(4).

设$f\in X^{Y+Z}$，则f是$Y+Z$到X的序同态. 令f_Y，f_Z分别是f在Y及Z上的限制（即$f_Y: Y\to X$，$f_Y(y)=f(y)$，$\forall y\in Y$；f_Z: $Z\to X$，$f_Z(z)=f(z)$，$\forall z\in Z$）. 由于$Y+Z$上的序关系保持了Y与Z中原有的序关系，因此易见f_Y，f_Z是序同态，即$f_Y\in X^Y$，$f_Z\in X^Z$. 反之，对任意的$f_Y\in X^Y$及$f_Z\in X^Z$，由于$Y\cap Z=\varnothing$，因此可以唯一决定$f\in X^{Y+Z}$，使得f在Y及Z上的限制恰为f_Y及f_Z. 于是$f\mapsto(f_Y, f_Z)$给出了X^{Y+Z}到X^YX^Z上一个双射，易证这还是序同构. 故有$X^{Y+Z}=X^YX^Z$.

设$f\in(XY)^Z$，则f是Z到XY的序同态. 对任意$z\in Z$，记

$$f(z)=(f_X(z),\ f_Y(z))\in XY,$$

则映射f_X：$z\mapsto f_X(z)$与f_Y：$z\mapsto f_Y(z)$分别是Z到X和Z到Y的同态，即：$f_X\in X^Z$，$f_Y\in Y^Z$. 反之，对任意$f_X\in X^Z$及$f_Y\in Y^Z$，存在唯一的$f\in(XY)^Z$，使得

$$f(z)=(f_X(z),\ f_Y(z)),\quad \forall z\in Z.$$

因此$f\mapsto(f_X, f_Y)$是$(XY)^Z$到X^ZY^Z上的双射，易证这还是

个序同构．故有$(XY)^Z=X^ZY^Z$．

设$f\in(X^Y)^Z$，对任意$z\in Z$，记$f(z)=f_z\in X^Y$，则f_z是Y到X的序同态．定义映射φ_f：$YZ\to X$，使得

$$\varphi_f((y,\ z))=f_z(y),\ (\forall (y,z)\in YZ).$$

易见φ_f是序同态，即$\varphi_f\in X^{YZ}$．反之，若$\psi\in X^{YZ}$，对任意的$z\in Z$，可定义映射ψ_z：$Y\to X$，使得

$$\psi_z(y)=\psi((y,\ z)),\ (\forall y\in Y),$$

易证$\psi_z\in X^Y$．令f：$Z\to X^Y$，使得$f(z)=\psi_z$，$(\forall z\in Z)$．则易证f是序同态，即$f\in(X^Y)^Z$，并且满足$\varphi_f=\psi$，因此$f\mapsto\varphi_f$是$(X^Y)^Z$到X^{YZ}上的双射，并且是序同构．故有$(X^Y)^Z=X^{YZ}$．▌

基数幂的一个重要应用是构造2^X，其中2表示序数2的链（见§2.2例4），X表示任意偏序集．为此需要定义几个概念．

设A是任意集合，A的子集族S叫做一个**子集环**，如果S关于集合的交、并封闭，即$B\cap C\in S$，$B\cup C\in S$（$\forall B$，$C\in S$，B，C是A的子集）．称S是一个**子集域**，如果S关于交、并、余封闭（余封闭是指$B'=A-B\in S$，$\forall B\in S$）．

显然A的幂集$P(A)$是一个子集环，也是一个子集域．

设$(X,\ \leqslant)$是任意偏序集，A是X的一个子集．称A是X的一个M-**闭子集**（或**半理想**），如果满足条件

(M) 若$x\leqslant y$且$y\in A$，则$x\in A$　$(\forall x,\ y\in X)$．

对偶地，称A是X的一个J-**闭子集**（或**对偶半理想**），如果满足条件

(J) 若$x\leqslant y$且$x\in A$，则$y\in A$　$(\forall x,\ y\in X)$．

容易证明

定理2　设$(X,\ \leqslant)$是任意偏序集，则

(1) X, $\varnothing$是X的J-闭子集(M-闭子集)；

(2) X的任意多个J-闭子集(M-闭子集)的交与并仍是X的J-闭子集(M-闭子集)；

(3) $A\subseteq X$是J-闭子集$\Longleftrightarrow X-A$是M-闭子集；

(4) X的所有J-闭子集(M-闭集)构成一个子集环.

证明留作练习. ▌

若用$J(X)$($M(X)$)表示偏序集X的所有J-闭子集(M-闭子集),则关于子集的包含关系$\subseteq$,$(J(X),\subseteq)$(($M(X),\subseteq$))成为一个偏序集，称之为X的**J-闭子集环**(**M-闭子集环**).

定理3 设X是任意偏序集，则基数幂2^X序同构于X的J-闭子集环(即$2^X\cong J(X)$).

证 设$f\in 2^X$，则f是X到2(含2个元的链)的序同态.不妨设$2=\{0,1\}$，令$A=f^{-1}(1)$. 易见A是X的J-闭子集，即$A=f^{-1}(1)\in J(X)$. 反之,对任意$A\in J(X)$，则A是X的J闭子集，定义f: $X\to 2$，使得对任意$x\in X$,$f(x)=1$(若$x\in A$)或$f(x)=0$(若$x\,\overline{\in}\,A$). 易证f是序同态，即$f\in 2^X$，并且$f^{-1}(1)=A$. 因此$f\mapsto f^{-1}(1)=A$是2^X到$J(X)$上的一个双射,并且$f\leqslant g$当且仅当$f^{-1}(1)\subseteq g^{-1}(1)$ ($\forall f,g\in 2^X$)，即上述双射是序同构. 故有$2^X\cong J(X)$. ▌

由对偶原则可得

定理3′ 设X是任意偏序集，则基数幂$2^{X^{-1}}$序同构于X的M-闭子集环(即$2^{X^{-1}}\cong M(X)$). ▌

练　习

1. 补证定理1及定理2.

2. 证明：若X，Y是两个上(下)半模偏序集，则$X+Y$，

XY亦然。

3. 设X是一偏序集，对任何基数m，n的反链(见§2.2例4)，证明：$X^1=X$，$X^mX^n=X^{m+n}$.

4.设P，Q，R为有限偏序集，P至少有2个元且P有一最小元．证明：若$P^Q\cong P^R$，则有$Q\cong R$.

§2.6 极小条件

由§2.2定理1可知在有限偏序集中，任何非空有限子集一定有极小元(极大元)．本节进一步讨论这方面的问题．

设$(P, \leqslant)$是任意一个偏序集．考虑下述条件：

A. **极小条件**：P中任意非空子集一定有极小元；

B. **降链条件**：P中任意元素列$\{a_i \mid i=1, 2, \cdots\}$若组成一个降链，即

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots,$$

则存在一个正整数m，使得$a_m=a_{m+n}$，$n=1, 2, \cdots$；

C. **归纳条件**：对于任意一种性质ε，若

(i) P中一切极小元(当它们存在时)具有性质ε，

(ii) 对于任意$a\in P$，如果一切真小于a的元素都具有性质ε，可推得a也具有性质ε，

则P中所有元素都具有性质ε.

对偶地，可有

A′. **极大条件**：P中任意非空子集一定有极大元；

B′. **升链条件**：P中任意元素列$\{a_n \mid n=1, 2, \cdots\}$若组成一个升链，即

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$

则存在一个正整数m，使得$a_m = a_{m+n}$，$n=1, 2, \cdots$；

C′. **对偶归纳条件**：对于任意一种性质ε，若

(i) P中一切极大元(当它们存在时)具有性质ε，

(ii) 对于任意$a \in P$，如果一切真大于a的元素都具有性质ε，可推得a也具有性质ε，

则P中所有元素都具有性质ε.

下面证明

定理1 对于任何偏序集$(P, \leqslant)$，条件A，B，C(对偶地：A′，B′，C′)彼此等价.

证 A⇒C. 设P满足极小条件，ε是某一性质，并且归纳条件的前提成立. 令

$$M = \{a \mid a \in P\text{且}a\text{不具有性质}\varepsilon\},$$

则$M \subseteq P$. 若$M \neq \varnothing$，由A知M中有一极小元$a \in M$，根据归纳条件的前提，a不是P中的极小元. 但是一切真比a小的元素不在M中，因而具有性质ε，由归纳条件的第二个前提推得a也具有性质ε. 此与$a \in M$矛盾. 故$M = \varnothing$，即C成立.

C⇒B. 设P满足归纳条件. 规定：

元素$a\,(a \in P)$具有性质ε当且仅当任意由a开始的降链

$$a = a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots$$

必稳定在有限项，即存在正整数n_0，使得$a_{n_0} = a_{n_0+1} = a_{n_0+2} = \cdots$. 显然$P$中一切极小元(当它们存在时)具有性质$\varepsilon$. 设$a \in P$，并且所有真比$a$小的元素都具有性质$\varepsilon$，易证$a$亦具有性质$\varepsilon$. 由C知$P$中所有元素都具有性质$\varepsilon$. 故B成立.

B⇒A. 设B成立. 若A不成立，则存在$N \subseteq P$，$N \neq \varnothing$，N无极小元，显然N是无限集. 任取$a_1 \in N$，a_1不会是N的极小元，因此存在$a_2 \in N$使得$a_1 > a_2$，…，假定已经找到

a_1，a_2，…，$a_k \in N$，并且$a_1 > a_2 > \cdots > a_k$，显然a_k也不是N的极小元，于是存在$a_{k+1} \in N$，使得$a_k > a_{k+1}$，…这样继续下去可得N中一列元素

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_k > \cdots,$$

此与条件B矛盾．故A成立．

利用对偶原则知A′，B′，C′彼此等价．▌

归纳条件不仅使我们可依归纳法去进行证明，也可用归纳法来构造．

定理2 设$(P, \leqslant)$是满足极小条件的偏序集，W是任意给定的集合，则存在唯一的映射φ：$P \to W$，满足条件：

(1)在P的所有极小元上φ取给定的值；

(2)φ满足给定的递推关系，即对任意的$a \in P$，$\varphi(a)$由所有真小于a的元素$b(b < a)$的值$\varphi(b)$唯一确定．

证 只给出证明概要，细节留给读者补充．

唯一性．若映射φ，ψ皆满足条件(1)，(2)，令$M = \{x \mid x \in P,\ \varphi(x) \neq \psi(x)\}$，可证$M = \varnothing$．否则，$M$中有极小元$a \in M$，但$a$不是$P$中极小元，因此有$b \in P$，$b < a$，并且所有这样的$b$适合$\varphi(b) = \psi(b)$(即$b \overline{\in} M$)，由递推关系知$\psi(a) = \varphi(a)$．矛盾．

存在性．对于$a \in P$，规定a具有性质ε当且仅当在截段$(a]$与W之间可定义映射φ_a且满足：

(i) 在$(a]$的极小元(显然也是P的极小元)上取给定的值；

(ii) φ_a满足给定的递推关系．

易见P中一切极小元具有性质ε．若a，$b \in P$都具有性质ε且$b < a$，易证φ_a在$(b]$上的限制等于φ_b．由此可证：若一切真

比a小的元素都具有性质e，则a亦然．利用归纳条件知P中一切元素都具有性质ε．最后定义φ：$P\to W$，使得$\varphi(a)=\varphi_a(a)$，$\forall a\in P$．可验证φ符合要求．▌

一个满足极小条件的线性序集（链）叫做一个**良序集**（相应的线性序关系叫做一个**良序**）．

例如自然数集N关于通常数的大小关系$\leqslant$是一个良序集．若$(P,\leqslant)$是一个良序集，易证P的任意子偏序集也是良序集．P中有唯一的极小元（也是最小元）．对于任意$a\in P$，只要a不是P的最大元，一定存在唯一的$b\in P$，b是a的上邻．（也称b为a的**后继元**）．但是a未必有下邻．当a不是P的最小元且a无下邻时，称a为P中的**极限元**．

下面证明

定理3 设$(P,\leqslant)$是任意偏序集，则P满足极小条件当且仅当P内的所有链都是良序集．

证 必要性显然．若P内所有链是良序集，设$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant\cdots$是$P$内任意一个降链，则该链中有一最小元，比如是$a_n$．从而$a_n=a_{n+1}=\cdots$，故$P$满足极小条件，即充分性成立．▌

若$(P,\leqslant)$是一个偏序集，$a\in P$．称P的子集

$$(a]^*=(a]-\{a\}=\{x\mid x\in P,\ x<a\}$$

为由a决定的**开截段**．相应地，$(a]$叫做由a决定的**闭截段**（或**截段**）（参见§2.1）．

§2.7中要用到以下结果：

定理4 设$(P,\leqslant)$是一个良序集，$A\subset P(A\neq P)$，则有

(1) A是P的M-闭子集$\Longleftrightarrow$存在$a\in P$，使得$A=(a]^*$．（特别，$\varnothing$是P的开截段）；

(2)$a\leqslant b(\forall a,\ b\in P)\Longleftrightarrow b\overline{\in}(a]^*$；

(3)若在P上添加一个最大元$I^*(I^*\overline{\in}P)$，记$P^*=P\cup\{I^*\}$，规应$a\leqslant I^*(\forall a\in P^*)$，而$P$中元素保持原来的序关系，则$P^*$也是良序集.

证明留作练习. ▌

练 习

1.证明：有限长的偏序集满足极大条件和极小条件.

2.设$(P,\ \leqslant)$是任意良序集，证明：

(1)P的每一个子偏序集仍是良序集，从而P的任意非空子集有最小元；

(2)P中每一个元素(非最大元)都有一个后继元(上邻)，举例说明一个元素(非最小元)未必有下邻.

3.证明本节定理4.

§2.7 等价于选择公理的一些定理

本节证明几个与选择公理(§1.5)等价的定理. 在不同的场合下使用它们各有方便之处. 它们是

Zermelo**定理** 任意一个集合P都可良序化(即存在P上的一个线性序$\leqslant$，使$(P,\ \leqslant)$成为良序集)；

Hausdorff**定理** 在任意偏序集$(P,\ \leqslant)$中，P内的每一个链包含在某个极大链之中；

Kuratowski-Zorn**定理** 若偏序集$(P,\ \leqslant)$内任一链在P内都有一个上界，则P的每一个元素都含于某一个极大元中。

上述三个定理有时也分别叫做**良序公理**，Hausdorff **极大原理**及Zorn**引理**．下面分四步证明它们都等价于选择公理．

命题1 选择公理蕴涵Zermelo定理．

证 设P是任意给定的集合($P\neq\varnothing$)．由选择公理，存在选择函数φ，使得对任意$N\subseteq P$，$N\neq\varnothing$，$\varphi(N)\in N$．称N**是标定子集**当且仅当N可以良序化，并且对任意$a\in N$有

$$a=\varphi(P-(a]_N^*).\qquad (*)$$

其中$(a]_N^*$表示在良序集N中，由a决定的开截段(§2.6)．令

$$\mathscr{L}=\{N\mid \varnothing\neq N\subseteq P,\ N\text{是标定子集}\},$$

显然$\mathscr{L}\neq\varnothing$(易证单元集$\{\varphi(P)\}\in\mathscr{L}$)．若$N\in\mathscr{L}$，则用$\leqslant_N$表示$N$中取定的满足(*)式的一个良序．可以证明：

(1)($\mathscr{L}$，$\subseteq$)是线性序集(其中$\subseteq$是集合包含关系)，并且若A，$B\in\mathscr{L}$，$A\subseteq B$，$A\neq B$，则A是B的一个开截段(关于$\leqslant_B$)．

任取A，$B\in\mathscr{L}$，设a，b分别是良序集(A，$\leqslant_A$)与(B，$\leqslant_B$)中的最小元，由(*)式知$a=\varphi(P)=b$，从而知(A，$\leqslant_A$)与(B，$\leqslant_B$)有非空的相重M-闭子集．令C是A，B所有相重M-闭子集的并，则C仍然是A，B的相重M-闭子集(§2.5定理2)．若$C\neq A$且$C\neq B$，则存在$a\in A$及$b\in B$，使得$C=(a]_A^*=(b]_B^*$(§2.6定理4)．由(*)式得$a=\varphi(P-C)=b$，因此C真包含在$C\cup\{a\}=C\cup\{b\}$之中，显然$(a]_A=C\cup\{a\}=C\cup\{b\}=(b]_B$是$A$，$B$的相重M-闭子集，此与$C$的选取矛盾．故必有$C=A$或$C=B$．因此有$A\subseteq B$或$B\subseteq A$，并且当$A\neq B$时，$A$是$B$的开截段或$B$是$A$的开截段．

(2)若A，$B\in\mathscr{L}$，$A\subseteq B$，则对任意的a，$b\in A$，有

$$a \leqslant_A b \Longleftrightarrow a \leqslant_B b.$$

不妨设$a \neq b$. 若 $a <_A b$, 易证$(b]_A^* \in \mathscr{L}$, 并且$(b]_A^* \subset B$. 由(1)知$(b]_A^*$是B的一个开截段且含a不含b, 从而$a <_B b$ (§2.6定理4). 反之, 若$a <_B b$, 亦可证$a <_A b$ (否则, 由于$\leqslant_A$是线性序, 可知必有$b <_A a$, 由上面结果推出$b <_B a$, 矛盾).

(3)令$L = \bigcup_{A \in \mathscr{L}} A$, 则$L \in \mathscr{L}$, 因而是$P$中最大的标定子集.

显然$L \neq \varnothing$. 对任意a, $b \in L$, 不妨设$a \in A$, $b \in B$, A, $B \in \mathscr{L}$, 并且$A \subseteq B$. 如下规定L的二元关系$\leqslant$:

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \leqslant_B b,$$

由(1), (2)可知上述定义合理, 并且$\leqslant$是线性序. L中若有降链

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots, \qquad (**)$$

不妨设$a_i \in A_i$, $A_i \in \mathscr{L}(i = 1, 2, \cdots)$. 可以断言, 对任意的$i$, 必有$a_i \in A_1$. 否则, 若有$a_i \notin A_1 (i \geqslant 2)$, 则$A_i \nsubseteq A_1$. 由(1)知必有$A_1 \subset A_i$, 且$A_1$是$(A_i, \leqslant_{A_i})$的开截段, 含$a_1$不含$a_i$. 于是$a_1 <_{A_i} a_i$, 此与$a_1 \geqslant a_i$矛盾. 故(**)也是$(A_1, \leqslant_{A_1})$中的降链, 于是存在正整数$m$, 使得$a_m = a_{m+1} = \cdots$. 故$\leqslant$是$L$中的良序. 易证$\leqslant$满足性质(*). 故$L \in \mathscr{L}$.

(4)$L = P$, 从而P可以良序化.

若$L \neq P$, 则$P\text{-}L \neq \varnothing$, 令$a^* = \varphi(P\text{-}L)$, 在良序集$(L, \leqslant)$中添加一个最大元$a^*$, 可得到一个良序集$L^* = L \cup \{a^*\}$ (§2.6定理4). 易证$L^* \in \mathscr{L}$, 此与L的选取矛盾. 故$L = P$. ▮

命题2 Zermelo定理蕴涵Hausdorff定理.

证 设$(P, \leqslant)$是一偏序集，A是P内的一个链．欲证A包含在P的某一极大链之中．若$A=P$，结论显然成立．设$A\neq P$，则$B=P-A\neq\varnothing$．据根Zermelo定理，存在B的一个良序$\leqslant'$，使得$(B, \leqslant')$成为良序集(注意，$\leqslant'$与P中的偏序$\leqslant$无任何联系)．将B中元素分为二类：

设b_0是$(B, \leqslant')$的最小元，若b_0与A中每一个元素可比(依P中的偏序$\leqslant$)，则b_0划为第一类；否则b_0划为第二类．对B中任意元素b，假定真小于(关于$\leqslant'$)b的所有元素的归类已划定，则b的归类如下规定：若b与A的每一个元素及B中真小于(关于$\leqslant'$)b且已划归第一类的元素都可比较(关于P中偏序$\leqslant$)，则b划为第一类；否则，b划为第二类．

由归纳条件可知，B的所有元素一意地划归第一类或第二类．令

$$C=A\cup\{x \mid x\in B\text{且}x\text{属于第一类}\},$$

则C中任意两个元素是可比的(关于$\leqslant$)，因而C是P内的链．易见C是P内的极大链，故命题得证．▌

命题3 Hausdorff定理蕴涵Zorn引理．

证 设$(P, \leqslant)$是一偏序集，其中任意链都有一个上界．任取$a\in P$，则$\{a\}$是P内的链，由Hausdorff定理，它包含在P的某一个极大链A中，设b是A的一个上界，易见$a\leqslant b$并且b是P中的极大元．▌

命题4 由Zorn引理可推得选择公理．

证 设P是任意集合$(P\neq\varnothing)$，称P的一些非空子集组成的子集族S是正规的，如果存在一个选择函数φ_S：$S\to P$，使得任意$\varnothing\neq A\subseteq P$，$A\in S$，有$\varphi_S(A)\in A$．令

$$\mathscr{S}=\{S \mid S\text{是}P\text{的正规非空子集族}\},$$

对于每一个$S\in\mathscr{L}$，取定一个相应的选择函数φ_S．易见$\mathscr{L}\neq\varnothing$（显然$\{P\}\in\mathscr{L}$），如下规一个二元关系$\leqslant$：

$$S\leqslant T(\forall S,\ T\in\mathscr{L})$$

$$\Longleftrightarrow S\subseteq T\text{且}\varphi_T\text{在}S\text{上的限制等于}\varphi_S,$$

则$\leqslant$是$\mathscr{L}$中一个偏序关系．若Γ是$(\mathscr{L},\ \leqslant)$中一个线性序子集，令$T=\bigcup\limits_{S\in\Gamma}S$，并定义$\psi$：$T\to P$，使得对任意$A\in T$，若$A\in S$，$S\in\Gamma$，则$\psi(A)=\varphi_S(A)$．亦即$\psi$在$S$上的限制等于$\varphi_S(\forall S\in\Gamma)$．由于$\Gamma$是$\mathscr{L}$中的线性序子集，易证$\psi$的定义合理并且是$T$上一个选择函数．因而$T\in\mathscr{L}$且是$\Gamma$的一个上界．由Zorn引理知$(\mathscr{L},\ \leqslant)$中有极大元．

设W是$\mathscr{L}$中的一个极大元，可以断言，W包括了P的所有非空子集，从而φ_W就是P的所有非空子集组成的子集族上的一个选择函数．若不然，设$A\bar{\in}W$，$\varnothing\neq A\subseteq P$，取定$a\in A$．令$W^*=W\cup\{A\}$，并且定义$\varphi_{W^*}$：$W^*\to P$，使得

$$\varphi_{W^*}(B)=\begin{cases}\varphi_W(B),\text{若}B\in W,\\ a, \qquad\quad \text{若}B=A.\end{cases}$$

则易见$W^*\in\mathscr{L}$，此与W是极大元矛盾．▌

最后我们指出，在上述四个等价的公理中，Zorn引理使用起来有特别的方便之处．作为例子，下面证明

命题5 设$\leqslant$是集合P的任意一个偏序关系，则存在P的一个线性序关系R，满足：

(*) 若$x\leqslant y(\forall x,\ y\in P)$，则$xRy$．

证 令$P^*=\{R\mid R\text{是}P\text{的偏序关系且}R\text{满足(*)}\}$，显然$\leqslant\in P^*$，因此$P^*\neq\varnothing$，并且关于二元关系的包含$\subseteq$关系，$(P^*,\ \subseteq)$成为一个偏序集．若$\Gamma$是$P^*$中一个链，易见$Q=\bigcup\limits_{R\in\Gamma}R\in P^*$且是$\Gamma$在$P^*$内的一个上界．由Zorn引理知$P^*$中有极大元$R$．

显然R是P的偏序且满足(*)．还需证R是线性序．若R不是线性序，则存在u，$v\in P$，使u，v关于R不可比．在P中定义二元关系R_1：

$$xR_1y\Longleftrightarrow xRy\text{ 或 }xRu\text{ 且 }vRy(\forall x,\ y\in P),$$

则R_1满足(*)．下面证R_1是P上的偏序关系．R_1显然满足反身性．设xR_1y，$yR_1z(x,\ y,\ z\in P)$．由R_1之定义知有以下四种可能：

(1)xRy且$yRz\Rightarrow xRz$,

(2)xRy，yRu且$vRz\Rightarrow xRu$且vRz,

(3)xRu，vRy且$yRz\Rightarrow xRu$且vRz,

(4)xRu，vRy，yRu且$vRz\Rightarrow vRu$(矛盾)．

前三种情形皆可推得xR_1z，而第四种情形不会发生，由此知R_1满足传递性．类似地可证反对称性．因此R_1是偏序关系，即$R_1\in P^*$．显然$R\subseteq R_1$但$R\neq R_1$，与R是极大元矛盾，故R是线性序．▮

练　　习

1．证明：若偏序集$(P,\ \leqslant)$中的反链至多含有k个元，则P是k个链的并(即存在k个P内的链$A_i(i=1,2,\cdots,k)$使得$P=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$)．

2．证明：若偏序集$(P,\ \leqslant)$内每一个链及反链都是有限集，则P为有限集．

第三章 格

格是一类重要的偏序集，它的理论已经深入到数学的各个分支，在许多领域中(如抽象代数、射影几何、点集论、拓扑学、泛函分析、逻辑及概率论等)都有广泛的应用．本章主要介绍格的一些基本知识，包括格的定义(§3.1)、格的类型(§3.2)、理想(§3.3)、格同态(§3.4)、格同余(§3.5)、格的表示(§3.6)、中心元、分配元、标准元(§3.7，§3.8)及格多项式(§3.9)．深入的讨论放在以后诸章。

§3.1 格的定义与代数特征

设A是偏序集$(P, \leqslant)$的任意子集，今后我们将如下表示A在P内的上确界及下确界(当存在时)：

$$\sup A=\bigvee A=\bigvee_{a\in A}a,$$
$$\inf A=\bigwedge A=\bigwedge_{a\in A}a.$$

若$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$为有限集，也记

$$\bigvee A=a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n=\bigvee_{i=1}^{n}a_i,$$

$$\bigwedge A=a_1\wedge a_2\wedge\cdots\wedge a_n=\bigwedge_{i=1}^{n}a_i.$$

一般地，$\bigvee A$及$\bigwedge A$未必存在．

在一个偏序集$(L, \leqslant)$中，如果任意两元x，y都有上确界$x\vee y$和下确界$x\wedge y$，则称偏序集$(L, \leqslant)$(或简称L)为一

个格.

这时，$x\vee y$及$x\wedge y$分别叫做x与y的**并**和**交**.

例1 任何线性序集(即链)是格. 对任意两元x，y，若有$x\leqslant y$，则$x\vee y=y$，$x\wedge y=x$.

例2 设A是给定集合，由A的若干子集构成的子集环(定义见§2.5)关于集合包含关系$\subseteq$成为格，其中$X\vee Y=X\cup Y$，$X\wedge Y=X\cap Y$. 特别地，A的幂集$P(A)$是一个格，称为A的**幂集格**.

例3 设V是数域P上的向量空间，V的所有子空间组成的集合关于集合包含关系$\subseteq$成为一个格. 若W，W'是V的两个子空间，则$W\wedge W'=W\cap W'$(子空间的交)，$W\vee W'=W+W'$(子空间的和).

若格L只含有限个元素，则称L为**有限格**；否则就称L为**无限格**. 显然有限格也可以用Hasse图来表示，例如图3.1.1表示了两个五元格.

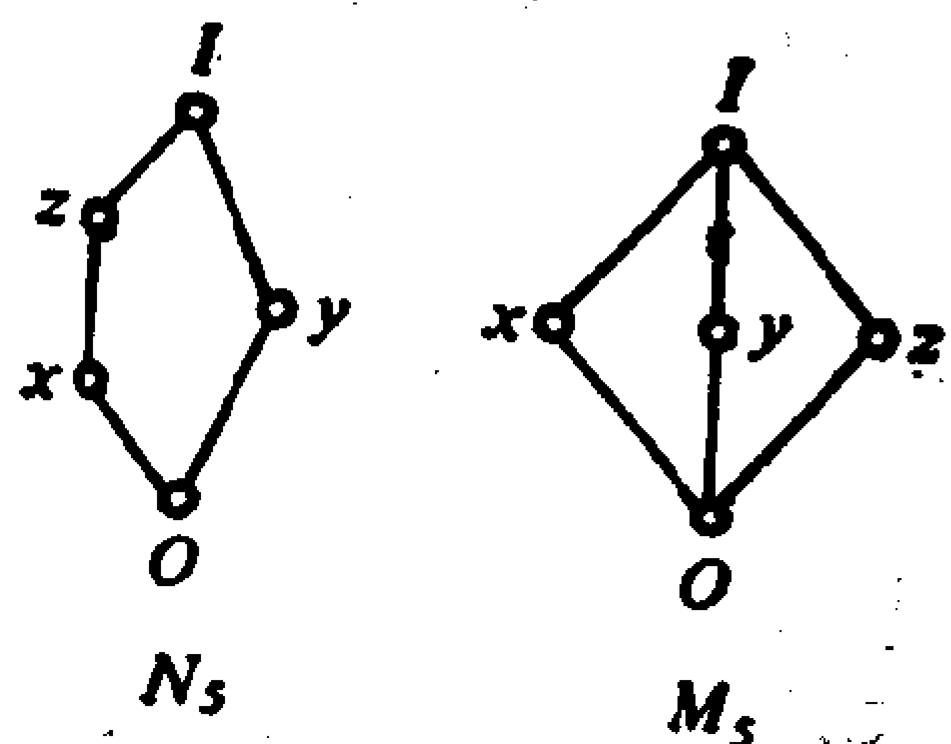


图3.1.1

类似地，偏序集中其它许多概念及术语，如泛界(单位元I，零元O)、邻元、原子、长(维数)、有限长(或相对有限长，有界有限长)、区间、…等，都可自然地移用到格上来，这里不再赘述.

由定义可得

定理1 设X，Y是非空的偏序集，则

(1)X是格$\Longleftrightarrow X$中任意非空有限子集有上确界和下确界；

(2) X是格$\Longleftrightarrow X^{-1}$($X$的对偶)是格；

(3)基数积XY是格$\Longleftrightarrow X$与Y都是格；

(4)基数幂Y^X是格$\Longleftrightarrow Y$是格.

证 由格的定义可得(1)，由对偶原则可得(2)，下证(3)与(4).

对任意(x,y)，$(x',y')\in XY$，易证$(x,y)\vee(x',y')$存在当且仅当$x\vee x'$与$y\vee y'$都存在，并且有$(x,y)\vee(x',y')=(x\vee x',y\vee y')$；对偶的结论也成立. 由此知(3)成立.

设Y是格. 对任意f，$g\in Y^X$，定义

$$\varphi_{f,g}: X\to Y \quad 及 \quad \psi_{f,g}: X\to Y,$$

使得对任意$x\in X$，$\varphi_{f,g}(x)=f(x)\vee g(x)$，$\psi_{f,g}(x)=f(x)\wedge g(x)$. 易证$\varphi_{f,g},\psi_{f,g}\in Y^X$，并且$f\vee g=\varphi_{f,g}$，$f\wedge g=\psi_{f,g}$，因此$Y^X$是格.

反之，设Y^X是格，对任意y，$y'\in Y$，定义

$$f_y: X\to Y \quad 及 \quad f_{y'}: X\to Y,$$

使得对任意$x\in X$，$f_y(x)=y$，$f_{y'}(x)=y'$. 易见f_y，$f_{y'}\in Y^X$，并且$f_y\leqslant f_{y'}$当且仅当$y\leqslant y'$. 令$\varphi=f_y\vee f_{y'}$($\varphi\in Y^X$)，$\varphi(x_0)=z_0$($x_0\in X$是任意取定的一个元素)，则可证$y\vee y'=z_0$，同理证$y\wedge y'$也存在，故Y是格. 因此(4)成立. ∎

上述定理中有关基数积的结果可以推广到任意多个偏序集上去.

设X是格L的一个子集. 若对任意a，$b\in X$，总有$a\wedge b\in X$，$a\vee b\in X$，则称X为格L的一个**子格**.

据根定义，下述事实是显然的：

(1)空子集$\varnothing$是格L的子格；

(2)格L的单元子集$\{a\}(a\in L)$是L的子格；

(3)格L的任意区间$[a, b](a, b\in L, a\leqslant b)$是$L$的子格；

(4)任意多个子格的交集仍是一个子格；

(5)若X是格L的子格，则X作为子偏序集本身也是格，并且对任意$a, b\in X$，a与b在X内的上(下)确界同它们在L内的上(下)确界是一致的.

注 可能存在这样的X，它作为格L的子偏序集本身成为格，但不是L的子格. 例如在图3.1.2所表示的格L中，令$X=L-\{a,b,e\}$，$Y=L-\{e\}$，则X是L的子格，Y不是L的子格，但是Y作为子偏序集本身成为格.

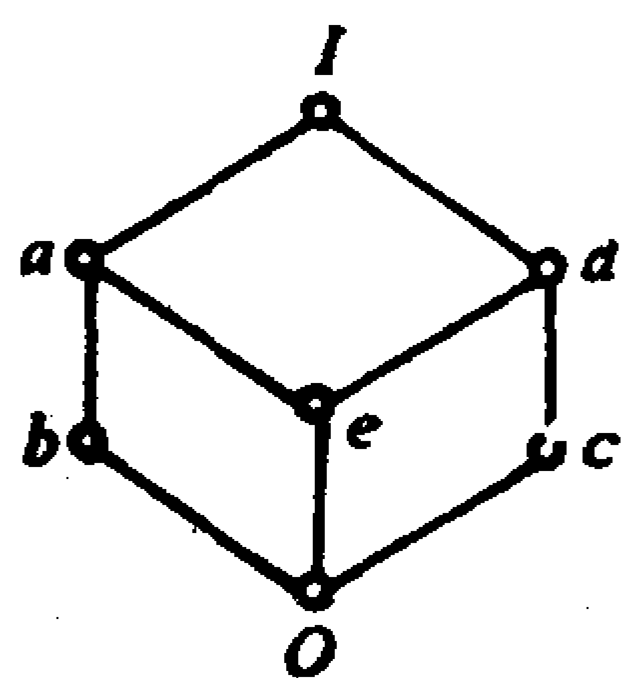


图 3.1.2

设H是格L的任意子集，由上述(4)可知，L中所有包含H的子格的交集仍是L的子格，称之为**由H生成的子格**，记作(H)，H叫做该子格的一个**生成系**. 若$H=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$为有限集，也记

$$(H)=(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

下面讨论格的代数特征. 若L是一个格，则L中任意两个元素x, y唯一确定了交$x\wedge y$与并$x\vee y$. 因此L可以看成是带有两个二元运算$\wedge$, $\vee$的代数系.

定理2 在格$(L, \leqslant)$中，下述条件等价：

(1)$x\leqslant y$, (2)$x\wedge y=x$, (3)$x\vee y=y$.

证 若$x\leqslant y$，则x是$\{x, y\}$的下界. 若z是$\{x, y\}$的任意一个下界，则$z\leqslant x$，即x是$\{x, y\}$的下确界，因此$x\wedge y=$

x. 反之，若$x\wedge y=x$，显然有$x\leqslant y$. 故(1)与(2)等价. 由对偶原则知(1)与(3)等价. ▮

特别，若格L中有泛界O(零元)及I(单位元)，则对任意$x\in L$有：

$$x\wedge O=O,\quad x\vee O=x,\quad x\wedge I=x,\quad x\vee I=I.$$

定理3 在格$(L,\ \leqslant)$中，对任意$x,\ y,\ z\in L$，有

L1 $x\wedge x=x$，$x\vee x=x$；(**幂等律**)

L2 $x\wedge y=y\wedge x$，$x\vee y=y\vee x$；(**交换律**)

L3 $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$，

$x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$；(**结合律**)

L4 $x\wedge(x\vee y)=x=x\vee(x\wedge y)$. (**吸收律**)

证 由定理2易证L1，L2及L4成立. 由§2.3定理4知L3成立. ▮

推论1 在格L中，交、并运算是保序的，即对任意$x,\ y,\ z\in L$，若$x\leqslant y$，则$x\wedge z\leqslant y\wedge z$，$x\vee z\leqslant y\vee z$.

证明留给读者. ▮

推论2 在格L中，成立分配不等式. 即对任意的$x,\ y,\ z\in L$，有

(1) $x\wedge(y\vee z)\geqslant(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$；

(2) $x\vee(y\wedge z)\leqslant(x\vee y)\wedge(x\vee z)$.

证 由推论1知$x\wedge(y\vee z)\geqslant x\wedge y$且$x\wedge(y\vee z)\geqslant x\wedge z$，故$x\wedge(y\vee z)\geqslant(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$，即(1)式成立. 由对偶原则知(2)式也成立. ▮

推论3 在格L中，成立模不等式. 即对任意的$x,\ y,\ z\in L$，若$x\leqslant z$，则$x\vee(y\wedge z)\leqslant(x\vee y)\wedge z$.

证 由定理2及分配不等式(2)直接得证. ▮

一般地，在一个格中，推论2及推论3中诸不等式中的等号未必成立．例如图3.1.1的N_5给出这样一个例子．

由定理3知道，一个格L是带有$\wedge$，$\vee$两种二元运算且具有性质L1—L4的代数系．事实上，L1—L4完全刻划了格的代数特征．

定理4 设L是带有$\wedge$，$\vee$两种二元运算的代数系，并且满足性质L1—L4，则

(1) $\forall x, y\in L, x\wedge y=x\Longleftrightarrow x\vee y=y$;

(2) 在L中如下定义二元关系$\leqslant$:

$$x\leqslant y\Longleftrightarrow x\wedge y=x,$$

则$(L, \leqslant)$是格，并且$x\wedge y$与$x\vee y$分别是x，y在格L中的下确界及上确界$(\forall x, y\in L)$．

证 (1) 若$x\wedge y=x$，由L2及L4得$x\vee y=(x\wedge y)\vee y=y$；反之，若$x\vee y=y$，则有$x\wedge y=x\wedge(x\vee y)=x$.

(2) 由L1知$x\wedge x=x$，因此$x\leqslant x$，即$\leqslant$满足反身性．若$x\leqslant y$且$y\leqslant x$，则$x\wedge y=x$且$y\wedge x=y$．由L2得$x=y$，即$\leqslant$满足反对称性．若$x\leqslant y$且$y\leqslant z$，则$x\wedge y=x$且$y\wedge z=y$．由L3得

$$x=x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z=x\wedge z,$$

于是$x\leqslant z$，即$\leqslant$满足传递性．故$(L, \leqslant)$是偏序集．对任意x，$y\in L$，由L4及L2知$x\wedge(x\vee y)=x$，$y\wedge(x\vee y)=y\wedge(y\vee x)=y$，因此$x\leqslant x\vee y$，$y\leqslant x\vee y$，即$x\vee y$是$\{x, y\}$的一个上界．若$z\in L$是$\{x, y\}$的上界，即$x\leqslant z$且$y\leqslant z$，则$x\wedge z=x$，$y\wedge z=y$．由(1)及L3得

$$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)=x\vee z=z,$$

于是$(x\vee y)\wedge z=x\vee y$，即$x\vee y\leqslant z$．因此$x\vee y$是$\{x, y\}$的

最小上界，即$x\vee y=\sup\{x, y\}$．由对偶原则可得$x\wedge y=\inf\{x, y\}$．故$(L, \leqslant)$是格，且满足(2)中最后的断言．▌

由定理3和定理4可知，一个格实质上就是带有两种二元运算(记为$\wedge$，$\vee$)且满足幂等律、交换律、结合律及吸收律(即L1—L4)的一个代数系统．这也可以作为格的又一定义．

需要指出的是，在带有$\wedge$，$\vee$两种二元运算的代数系中，公设L1—L4并非独立．容易证明L4蕴涵L1，但是L2—L4中6个恒等式是独立的(练习4)．

类似地可以引入所谓半格的概念．

称带有一个二元运算且满足幂等律 交换律及结合律的代数系为一个**半格**．

定理5 设$(P, \leqslant)$是一个偏序集，且对任意的$x, y\in P$，下确界$x\wedge y$(或上确界$x\vee y$)存在，则代数系$(P, \wedge)$(或$(P, \vee)$)是一个半格．这时称偏序集$(P, \leqslant)$为**交半格**(或**并半格**)．

反之，若代数系$(P, \circ)$是一个半格，在P中如下定义二元关系$\leqslant$：

$$x\leqslant y\Longleftrightarrow x\circ y=x \qquad (\text{或}x\circ y=y),$$

则$(P, \leqslant)$是一个偏序集，并且对任意的$x, y\in P$，存在下确界$x\wedge y=x\circ y$(或上确界$x\vee y=x\circ y$)．

证明留作练习．▌

定理6 设$(P, \leqslant)$是一个偏序集，则

(1) $(P, \leqslant)$是格$\Longleftrightarrow(P, \leqslant)$既是交半格，又是并半格；

(2)若$(P, \leqslant)$是有限长且带有泛界I(或O)的交半格(或并半格)，则$(P, \leqslant)$是格．

证 (1)显然. 下证(2). 设$(P, \leqslant)$有限长且是带有I的交半格. 对任意$x, y\in P$,则$\{x, y\}$的上界集$M_a\{x, y\}\neq\varnothing$(因为$I\in M_a\{x,y\}$). 显然$(P, \leqslant)$满足极大条件与极小条件(§2.6练习1), 因此$M_a\{x, y\}$有极小元$z_0$. 由于$P$是交半格,对于任意$z'\in M_a\{x, y\}$, $z_0\wedge z'$存在, 并且易证$z_0\wedge z'\in M_a\{x,y\}$. 由$z_0$的极小性可知$z_0=z_0\wedge z'$, 因此$z_0\leqslant z'$, 即$z_0$是$M_a\{x, y\}$的最小元. 于是$z_0=x\vee y$, 从而$(P, \leqslant)$又是并半格. 由(1)知$(P, \leqslant)$是格. 由对偶原则可知对偶的结论也成立. ∎

练 习

1. 补证推论1与定理5.

2. 设L是一个格, 证明:

(1)若L有极大元(或极小元), 则只有一个, 并且是L的最大元(或最小元);

(2)若L有限长, 则L必有泛界I和O;

(3)对任意$a, b, c, d\in L$,有

$$(a\vee b)\wedge(c\vee d)\geqslant(a\wedge c)\vee(b\wedge d).$$

3. 格L的一个子集S叫做L的一个**凸子格**, 如果满足: $\forall a,b\in S$总有$[a\wedge b, a\vee b]\subseteq S$. 证明:

(1)L的凸子格一定是L的子格;

(2)对任意子集$A\subseteq L$, A在L中的上界集M_aA及下界集M_lA都是L的凸子格.

4. 在带有$\wedge$, $\vee$两个二元运算的代数系L中, 证明公设L4蕴涵L1. 举例说明L2—L4中6个恒等式是独立的.

§3.2 格的类型

本节介绍常见的几种格的定义及其简单性质，以后各章再对它们作详细的讨论.

格$(L, \leqslant)$叫做一个**完备格**(简称**备格**)，如果L的任意非空子集S都有上确界$\vee S$和下确界$\wedge S$.

设S是完备格L的子格. 若对S的每一个非空子集T都有$\vee T \in S$, $\wedge T \in S$，则称S是L的**闭子格**.

显然备格L一定有泛界O和I，且当L含有2个以上元素时$O \neq I$. 一个备格的非空闭子格作为子偏序集仍是一个备格.

一般地，一个格未必是备格；备格的子格也未必是闭子格.

例1 设X是任意集合，则X的幂集格$(P(X), \subseteq)$是完备格，其中$\varnothing$是零元，X是单位元. 若$\{A_i \mid i \in I\}$是$P(X)$的子集(即X的子集族)，则

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i, \quad \bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

任取$a \in X$, $P_a(X)$表示所有含a的X的子集组成的集合，则$P_a(X)$是$P(X)$的闭子格. 若X是无限集，令$P_0(X)$表示X的全体有限子集(包括$\varnothing$)组成的集合，则$P_0(X)$是$P(X)$的子格但不是闭子格.

例2 实数集R关于自然序$(\leqslant)$是格(线性序集)，但不是完备格. 如果添加上泛界$-\infty(=O)$及$+\infty(=I)$，那么$R \cup \{\pm\infty\}$成为备格.

容易证明下述结果

定理1 设L，$L_i(i\in I)$是格，则

(1)L是备格$\Longleftrightarrow L^{-1}$($L$的对偶)是备格；

(2)$\prod_{i\in I} L_i$(基数积)是备格$\Longleftrightarrow L_i$是备格，$\forall i\in I$；

(3)若L是有限格，则L是备格.

证明留作练习. ∎

下面讨论格中交、并运算的分配性.

定理2 在任意格L中，下述两个分配恒等式等价：

D1 $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$，$\forall x,y,z\in L$；

D2 $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$，$\forall x,y,z\in L$.

证 设D1成立. 对任意$x,y,z\in L$,则有

$$
\begin{aligned}
(x\vee y)\wedge(x\vee z) &= ((x\vee y)\wedge x)\vee((x\vee y)\wedge z) \\
&= x\vee((x\wedge z)\vee(y\wedge z)) \quad &(\text{由L2及L4}) \\
&= (x\vee(x\wedge z))\vee(y\wedge z) \quad &(\text{由L3}) \\
&= x\vee(y\wedge z) \quad &(\text{由L4})
\end{aligned}
$$

因此D2成立. 同理由D2可证D1. ∎

注 上述定理中，D1与D2要求对于L中所有的三元组$\{x,y,z\}$都成立. 若对于个别的元素x,y,z，虽有D1或D2之一成立，并不能保证另一式也成立. 例如图3.1.1中N_5的元素x,y,z，适合D1但不适合D2.

满足分配恒等式D1(或D2)的格L叫做一个**分配格**.

例3 设X是任意集合，则X上的子集环(特别的，X的幂集格$P(X)$)是分配格.

例4 自然数集N关于整除关系“|”成为一个分配格.

显然(N，|)是一个偏序集(§2.1例2). 若a，$b\in$N，则

$$a\wedge b=(a,b),\quad a\vee b=[a,b]$$

其中(a, b)及$[a, b]$分别表示a和b的最大公约数与最小公倍数. 因而(N, |)是一个格, N中每一个元素x均可唯一表成相异素数的方幂乘积的形式

$$x=\prod p_i^{e_i(x)},$$

其中$e_i(x)$表示x分解式中因子$p_i^{e_i(x)}$的幂指数. 显然有

$$e_i(a\wedge b)=\min\{e_i(a),\ e_i(b)\},$$
$$e_i(a\vee b)=\max\{e_i(a),\ e_i(b)\}.$$

因此对任意$a, b, c\in$N, 总有

$$\begin{aligned}e_i(a\wedge(b\vee c))&=e_i((a\wedge b)\vee(a\wedge c))\\&=\min\left\{e_i(a),\max\{e_i(b),\ e_i(c)\}\right\},\end{aligned}$$

于是$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$. 故(N, |)是一个分配格.

定理3 设L, $L_i(i\in I)$是格, X, Y是偏序集, 则

(1)L是分配格$\Longleftrightarrow L^{-1}$($L$的对偶)是分配格;

(2)$\prod\limits_{i\in I}L_i$是分配格$\Longleftrightarrow L_i(\forall i\in I)$是分配格;

(3)Y^X是分配格$\Longleftrightarrow Y$是分配格;

(4)若L是链, 则L是分配格;

(5)若L是分配格, 则L的子格也是分配格.

证 只证(3), 其余留作练习.

由§3.1定理1(4)可知Y^X是格当且仅当Y是格, 仍使用该定理证明中的符号. 设Y是分配格, 对任意$f, g, h\in Y^X$, 有

$$f\wedge(g\vee h)=\psi_{f,\phi_{g,h}},\qquad (f\wedge g)\vee(f\wedge h)=\varphi_{\psi_{f,g},\psi_{f,h}}.$$

于是对任意$x\in X$,

$$\begin{aligned}(f\wedge(g\vee h))(x)&=f(x)\wedge(g(x)\vee h(x))\\&=(f(x)\wedge g(x))\vee(f(x)\wedge h(x))\end{aligned}$$

$$=((f\wedge g)\vee(f\wedge h))(x).$$

因此$f\wedge(g\vee h)=(f\wedge g)\vee(f\wedge h)$．故$Y^X$是分配格．

反之，设Y^X是分配格．若y，$y'\in Y$，由§3.1定理1(4)的证明可知$f_y\wedge f_{y'}=f_{y\wedge y'}$，$f_y\vee f_{y'}=f_{y\vee y'}$．于是对任意$a$，$b$，$c\in Y$，有

$$f_{a\wedge(b\vee c)}=f_a\wedge(f_b\vee f_c)=(f_a\wedge f_b)\vee(f_a\wedge f_c)$$
$$=f_{a\wedge b}\vee f_{a\wedge c}=f_{(a\wedge b)\vee(a\wedge c)},$$

因此$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$．故$Y$是分配格．▌

分配格还有下述特性．

定理4 设L是分配格，c，x，$y\in L$．

(1)若$c\wedge x=c\wedge y$且$c\vee x=c\vee y$，则$x=y$；

(2)L不含五元子格N_5及M_5(见图3.1.1)．

证 (1)由L2，L4及D1得

$$x=x\wedge(c\vee x)=x\wedge(c\vee y)=(x\wedge c)\vee(x\wedge y)$$
$$=(c\wedge y)\vee(x\wedge y)=(c\vee x)\wedge y=(c\vee y)\wedge y=y.$$

(2)显然N_5与M_5都不是分配格．由定理3(5)知结论成立．▌

事实上，定理4的(1)或者(2)也是分配格的特征性质，即具有性质(1)或(2)的格一定是分配格(见§7.1定理1)．

比分配格更广泛的一类格是模格．

格L叫做一个**模格**，如果对任意a，b，$c\in L$，满足**模律**：

(M) 若$a\leqslant c$，则$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$．

例如群G的所有子群(不变子群)关于集合包含关系$\subseteq$构成模格．数域F上的向量空间V的所有子空间关于集合包含

关系⊆也构成模格.

定理5 设L，$L_i(i\in I)$是格，X，Y是偏序集，则

(1)L是模格$\Longleftrightarrow L^{-1}$($L$的对偶)是模格；

(2)$\prod_{i\in I}L_i$是模格$\Longleftrightarrow L_i(\forall i\in I)$是模格；

(3)Y^X是模格$\Longleftrightarrow Y$是模格；

(4)若L是模格，则L的子格也是模格；

(5)若L是分配格，则L一定是模格.

证 显然分配律D2蕴涵模律(M)，因此(5)成立.(1)—(4)的证明仿定理3. ▌

模格还有以下特性：

定理6 设L是模格，a，b，$c\in L$，

(1)若$b\leqslant c$且$a\wedge b=a\wedge c$，$a\vee b=a\vee c$，则$b=c$；

(2)L不含五元子格N_5(见图3.1.1).

证明仿定理4. ▌

上述定理的逆亦真，即具有性质(1)或(2)的格一定是模格(见§5.4定理1).

下面讨论有补格.

设L是有O，I的格，x，$y\in L$. 若$x\wedge y=O$,$x\vee y=I$，则称y是x的一个**补元**；若$[a, b]$是L的闭区间，并且$x\wedge y=a$，$x\vee y=b$，则称y是x在闭区间$[a, b]$内的**相对补元**；特别地，若y是x在$[O, b]$($b\in L$)内的相对补元，则称y是x**在b内的补元**.

格L叫做一个**有补格**，如果L有O，I并且它的所有元有补元；L叫做一个**相对有补格**，如果它的所有(闭)区间是有补的(即$\forall a\leqslant x\leqslant b$，$x$在$[a, b]$内有相对补元)；$L$叫做一个**分段有补格**，如果它有$O$且每个区间$[O, b]$是有补的(即$\forall$

$x \leqslant b$，x在b内有补元）.

由定义可知，有O的相对有补格一定是分段有补格；有O，I的相对有补格（有I的分段有补格）必是有补格．反之不真．例如图3.2.1中(a)表示一个分段有补格但非相对有补格．(b)表示一个有补格但非分段有补格，亦非相对有补格．由右图还可看出，在一个格中，一元素的补元（或相对补元）如果存在，不一定是唯一的．但是由定理4可知，在分配格中一个元素的补元（或相对补元）至多有一个．

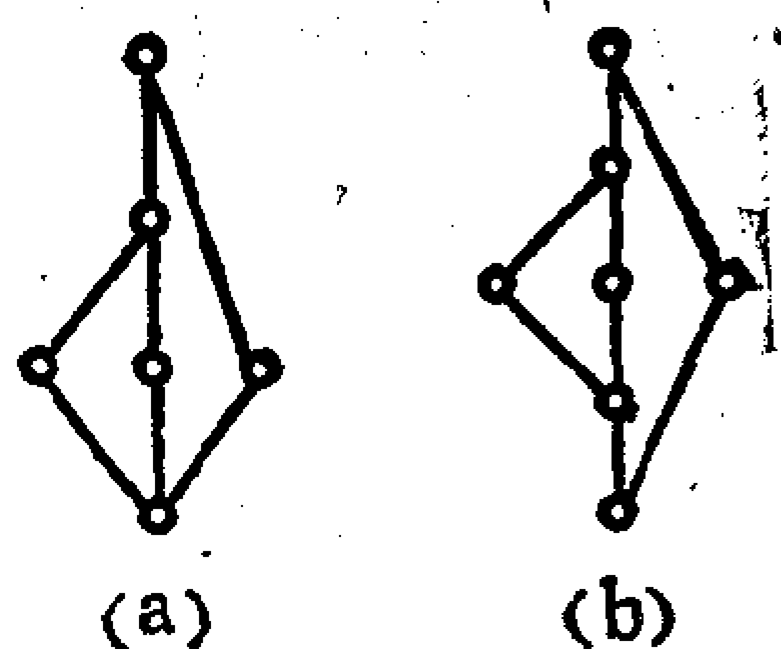


图 3.2.1

定理7　设L，$L_i(i \in I)$是格，则

(1)L是有补格（相对有补格）$\Longleftrightarrow L^{-1}$（$L$的对偶）是有补格（相对有补格）；

(2) $\prod_{i \in I} L_i$是有补格（相对有补格或分段有补格）$\Longleftrightarrow$ $L_i(\forall i \in I)$是有补格（相对有补格或分段有补格）；

(3)若L是有补模格，则L是相对有补格．

证　(1)，(2)显然．下证(3)．设L是有补模格，$a \leqslant x \leqslant b(a, b, x \in L)$，则$x$有一补元$x' \in L$，使得$x \wedge x' = O$，$x \vee x' = I$．令$y = a \vee (b \wedge x')$，则有

$$
\begin{aligned}
x \wedge y = x \wedge (a \vee (b \wedge x')) &= a \vee (x \wedge (b \wedge x')) \quad \text{(由(M))} \\
&= a \vee ((x \wedge x') \wedge b) \quad \text{(由L2，L3)} \\
&= a \vee (O \wedge b) \\
&= a \vee O = a,
\end{aligned}
$$

同理，$x \vee y = b$．即y是x是$[a, b]$内的相对补元，故L为相对有补格．▌

称一个有补分配格为Boole格或Boole代数.

若L是一个Boole格，则L一定是相对有补格，且L中任意元素x有唯一的补元，记作x'.

定理8 设L是Boole格，对任意x，$y\in L$，

(1) $x\wedge x'=O$，$x\vee x'=I$；

(2) $(x')'=x$；

(3) $(x\wedge y)'=x'\vee y'$，$(x\vee y)'=x'\wedge y'$；

(4) $O'=I$，$I'=O$；

(5) $x\wedge y=O\Longleftrightarrow x\leqslant y'$；

(6) $x\leqslant y\Longleftrightarrow y'\leqslant x'$.

证 只证(3)和(5)，其余留给读者，由分配律、交换律及结合律可得

$$\begin{aligned}&(x\wedge y)\wedge(x'\vee y')\\=&((x\wedge y)\wedge x')\vee((x\wedge y)\wedge y')\\=&((x\wedge x')\wedge y)\vee(x\wedge(y\wedge y'))\\=&(O\wedge y)\vee(x\wedge O)=O\vee O=O.\end{aligned}$$

同理，$(x\wedge y)\vee(x'\vee y')=I$. 因此$(x\wedge y)'=x'\vee y'$. 类似可证$(x\vee y)'=x'\wedge y'$，故(3)成立.

设$x\wedge y=O$，由(3)及(4)得$x'\vee y'=I$. 利用分配律，$x=x\wedge I=x\wedge(x'\vee y')=(x\wedge x')\vee(x\wedge y')=O\vee(x\wedge y')=x\wedge y'$，于是$x\leqslant y'$. 反之，若$x\leqslant y'$，由交运算的保序性（§3.1推论1），$x\wedge y\leqslant y'\wedge y=O$. 于是$x\wedge y=O$，故(5)成立. ▌

在有泛界O，I的分配格L中，称子格S是L的一个**Boole子代数**，如果S中每一个元x在L中有补元x'，并且$x'\in S$.

显然Boole子代数一定是Boole格（Boole代数）. 反之，

若一个子格S本身是Boole格(Boole代数)，但S未必是L的Boole子代数.

例如，集合X上的幂集格$P(X)$是Boole格，X的子集域(定义见§2.5)是$P(X)$的Boole子代数。若L是Boole格，L的区间子格$[a, b]$($O \neq a \leqslant b \neq I$)是Boole格(Boole代数)，但不是$L$的Boole子代数.

带有泛界O，I的分配格包含一个最大的Boole子代数.

定理9 设L是有O，I的分配格，则L的全体有补元构成L的一个子格，因而是L的一个最大的Boole子代数.

证 令$A=\{x \mid x \in L$，且x有补元$x'\}$. 任取$x, y \in A$，显然$x', y' \in A$. 仿定理8可证，$x \wedge y$与$x \vee y$都有补元，并且$(x \wedge y)'=x' \vee y'$，$(x \vee y)'=x' \wedge y'$，因此$x \wedge y \in A$，$x \vee y \in A$. 故A是L的子格. 显然A是L最大的Boole子代数. ▮

练　习

1. 补证定理1与定理3.

2. 证明：相对有补格的区间子格仍是相对有补格.

3. 构造一个6元的有补但非相对有补格.

4. 证明：任何长为2的格一定是模格.

5. 带有泛界O，I的格L叫做**正交格**，如果它有一个一元运算$a \mapsto a^{\perp}$，满足

1) $a \wedge a^{\perp}=O$，$a \vee a^{\perp}=I$；

2) $(a^{\perp})^{\perp}=a$；

3) $(a \wedge b)^{\perp}=a^{\perp} \vee b^{\perp}$，$(a \vee b)^{\perp}=a^{\perp} \wedge b^{\perp}$.

若L是正交格且还满足

4) 当$a \leqslant b$时　$a \vee (a^{\perp} \wedge b)=b$，$\forall a, b \in L$，

则L叫做一个**正交模格**．证明：

(1)任何Boole格(关于取补)是正交格；

(2)实数域R上n维欧氏空间V的子空间格(关于取子空间的正交补)是一个正交模格．

§3.3 理　　想

设$(L, \leqslant)$是格(或并半格)，J是L的子集且满足

(1)$a \vee b \in J$，$(\forall a, b \in J)$；

(2)若$x \leqslant a$，则$x \in J$，$(\forall a \in J, x \in L)$；

这时称J为L的一个**理想**(或**并理想**)．

对偶地，可定义格(或交半格)的**对偶理想**(或**交理想**)．

若J是格L的理想(或对偶理想)且$J \neq \varnothing$，$J \neq L$，则称J是L的**真理想**(或**真对偶理想**)．特别地，集合X的幂集格$P(X)$的真对偶理想也叫做集X的一个**滤子**．

显然，$\varnothing$，L是格L的理想(对偶理想)，称它们为**平凡理想**(**平凡对偶理想**)．格L的所有理想(对偶理想)都是L的子格．

定理1　设L是任意格，J是L的子集．

(1)J是L的理想(对偶理想)当且仅当J满足

$a \vee b \in J (a \wedge b \in J) \Longleftrightarrow a \in J$且$b \in J$，$\forall a, b \in L$；

(2)若J是L的子格，则J是L的理想(对偶理想)当且仅当J满足

$\forall a \in J$，$b \in L$，有$a \wedge b \in J (a \vee b \in J)$；

(3)L的任意多个理想(对偶理想)的交集仍是L的理想对偶理想)，L的有限多个真理想(真对偶理想)的交集仍是L的真理想(真对偶理想)．

证 (1)设 J 是 L 的理想，若 $a\vee b\in J(a, b\in L)$，则 $a\leqslant a\vee b$，$b\leqslant a\vee b$，由理想的定义得 $a, b\in J$. 反之，由 $a, b\in J$ 可知 $a\vee b\in J$. 设 J 满足性质：

$$a\vee b\in J\Longleftrightarrow a\in J \text{且} b\in J, \quad \forall a, b\in L.$$

若 $a\in J$，$x\in L$，且 $x\leqslant a$，则 $x\vee a=a\in J$. 于是有 $x\in J$. 因此 J 是 L 的理想. 同理可证对偶结论也成立.

(2)设 J 是 L 的子格. 若 J 是 L 的理想，$a\in J$，$b\in L$，显然 $a\wedge b\leqslant a$，因此 $a\wedge b\in J$. 反之，若 J 满足条件：$\forall a\in J$，$b\in L$，有 $a\wedge b\in J$，则对任意 $x\leqslant a(x\in L, a\in J)$，有 $x=x\wedge a\in J$. 因此 J 是 L 的理想. 同理证对偶结论也成立.

(3)前一论断显然成立，后一论断只需对两个理想证明. 设 A，B 是 L 的两个真理想，则 $A\neq L$，$B\neq L$，因此 $A\cap B\neq L$. 又因 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，取 $a\in A$，$b\in B$，则由(2)知 $a\wedge b\in A\cap B$，于是 $A\cap B\neq\varnothing$. 故 $A\cap B$ 是 L 的真理想. ▮

设 H 是格 L 的任意子集，则 L 中所有包含 H 的理想(对偶理想)的交集是 L 的一个理想(对偶理想)，并且是 L 中包含 H 的最小的理想(对偶理想)，称之为**由 H 生成的理想(对偶理想)**，记作 $(H]$ ($[H)$).

当 $H=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 为有限集时，也记 $(H]=(a_1, a_2, \cdots, a_n]$ (相应地，$[H)=[a_1, a_2, \cdots, a_n)$). 特别地，由单元集 $\{a\}$ 生成的理想 $(a]$ (对偶理想 $[a)$) 叫做 L 的**主理想(主对偶理想)**. 显然有

$$(a]=\{x\mid x\in L, x\leqslant a\}, \quad [a)=\{x\mid x\in L, x\geqslant a\}.$$

利用主理想(主对偶理想)的概念可以刻划极大条件(极小条件)(见 § 2.6).

定理2 对任意格 L，下述条件等价：

(1)L满足极大条件(极小条件)；

(2)L 中任意非空理想(对偶理想)是主理想(主对偶理想).

证 (1)⇒(2). 设L满足极大条件，J是L的非空理想，则J有极大元a. 易证a也是J的最大元，并且$J=(a]$.

(2)⇒(1). 设L满足(2). 为证(1)，只需证L满足升链条件(§2.6定理1). 若$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$是$L$中一个升链，令

$$J=\{x \mid x \in L\text{且对某个}a_i,\ x \leqslant a_i\},$$

易见J是L的非空理想，于是有$a \in J$，使$J=(a]$. 显然J包含所有的a_i，因此$a_i \leqslant a (i=1, 2, \cdots)$. 由$J$的构成知存在某个$a_n$，使$a \leqslant a_n$，于是$a=a_n=a_{n+1}=\cdots$. 故$L$满足升链条件.

同理可证对偶的结论也成立. ▌

推论1 设L是有限长的格，则L的任意非空理想(对偶理想)是主理想(主对偶理想).

证 由定理2及§2.6练习1得证. ▌

若L是一个格，令$\hat{L}$表示由L的所有理想组成的集合，$\bar{L}$是由L的所有非空理想组成的集合(即$\bar{L}=\hat{L}-\{\varnothing\}$)，$L^*$是由$L$的所有主理想组成的集合. 易见$L^* \subseteq \bar{L} \subseteq \hat{L}$.

定理3 对任意格L,

(1)$\hat{L}$关于子集包含关系$\subseteq$成为完备格；

(2)$\bar{L}$是格$(\hat{L}, \subseteq)$的子格；

(3)若A，B是L的非空理想，在格$\hat{L}$中，则

$$A \wedge B=\{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\},$$

$$A \vee B=\{x \mid x \in L\text{ 且 }x \leqslant a \vee b,\text{ 对某个}a \in A,\ b \in B\}.$$

特别当 L 是分配格时，有

$$A\vee B=\{a\vee b\mid a\in A,b\in B\}.$$

证 (1)$(\hat{L},\ \subseteq)$是偏序集. 若$\{J_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$是$L$的理想族，则由定理1知

$$\bigwedge_{\alpha\in\Gamma}J_\alpha=\bigcap_{\alpha\in\Gamma}J_\alpha,\qquad \bigvee_{\alpha\in\Gamma}J_\alpha=(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}J_\alpha].$$

故$(\hat{L},\ \subseteq)$是完备格.

(2)由定理1(3)知L是$\hat{L}$的子格.

(3)由定理1(2)及L1(幂等律)知

$$A\wedge B=A\cap B=\{a\wedge b\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

令$W=\{x\mid x\in L$且$x\leqslant a\vee b$，对某个$a\in A,\ b\in B\}$. 显然$A\cup B\subseteq W$. 如果$x\vee y\in W(x,\ y\in L)$，则存在$a\in A$，$b\in B$，使得$x\leqslant x\vee y\leqslant a\vee b$. 因此$x\in W$，同理$y\in W$. 反之，若$x\in W$且$y\in W$，则$x\leqslant a\vee b$，$y\leqslant a'\vee b'$(存在$a$，$a'\in A$，$b$，$b'\in B$)，因而$x\vee y\leqslant(a\vee a')\vee(b\vee b')$，其中$a\vee a'\in A$，$b\vee b'\in B$. 于是$x\vee y\in W$. 由定理1(1)知$W$是$L$的理想，并且$A\cup B\subseteq W$. 若$J$是$L$的理想，并且$J\supseteq A\cup B$，易见$J\supseteq W$. 因此$W$是由$A\cup B$生成的理想. 故$A\vee B=(A\cup B]=W$.

当L是分配格时，若$x\in W$，则$x\leqslant a\vee b$，$a\in A$，$b\in B$. 于是

$$x=x\wedge(a\vee b)=(x\wedge a)\vee(x\wedge b),$$

其中$x\wedge a\in A$，$x\wedge b\in B$. 即

$$W\subseteq\{a\vee b\mid a\in A,\ b\in B\},$$

另一方面，$W\supseteq\{a\vee b\mid a\in A,b\in B\}$显然成立. 故

$$A\vee B=\{a\vee b\mid a\in A,\ b\in B\}.\ \blacksquare$$

推论2 设L是任意格，$(a]$，$(b]$是L的主理想，则

(1)在格$\hat{L}$中，

$$(a]\wedge(b]=(a\wedge b],\quad (a]\vee(b]=(a\vee b];$$

(2) L^*是$\hat{L}$(或$\check{L}$)的子格.

证明留作练习. ▮

推论3 若L是模格(或分配格), 则$\hat{L}$, $\check{L}$及L^*也是模格(或分配格).

证 设A, B, C是L的理想, $A\subseteq C$. 任取$x\in(A\vee B)\wedge C$, 由定理3(3)知存在$a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, 使$x\leqslant(a\vee b)\wedge c$. 显然, $a\in C$, $c^*=a\vee c\in C$. 由模律得

$$x\leqslant(a\vee b)\wedge c\leqslant(a\vee b)\wedge c^*=a\vee(b\wedge c^*),$$

于是$x\in A\vee(B\wedge C)$. 因而

$$(A\vee B)\wedge C\subseteq A\vee(B\wedge C).$$

再由模不等式(§3.1 推论 3)知$(A\vee B)\wedge C\supseteq A\vee(B\wedge C)$, 故

$$(A\vee B)\wedge C=A\vee(B\wedge C)\quad(\forall A,\ B,\ C\in\hat{L},\ A\subseteq C),$$

即$\hat{L}$是模格. 由§3.2定理3及定理5知$\check{L}$, L^*也是模格.

同理可证, 若L是分配格, 则$\hat{L}$, $\check{L}$及L^*也是分配格. ▮

类似的结论对于Boole格不成立. 存在完备的 Boole 格L, 但是$\hat{L}$及$\check{L}$都不是Boole 格(练习 2).

设J是格L的一个真理想(真对偶理想). 若对任意a, $b\in L$, 由$a\wedge b\in J$(相应地, 由$a\vee b\in J$)可推出$a\in J$或$b\in J$, 则称J为L的**素理想**(**素对偶理想**); 若对L的任意理想(对偶理想)J', 由$J\subseteq J'$可推出$J'=J$或$J'=L$, 则称J为L的**极大理想**(**极大对偶理想**).

定理4 设L是任意格, J是L的子集.

(1) J是L的素理想$\Longleftrightarrow L-J$是L的素对偶理想;

(2) 若J是L的真理想, 则J是素理想$\Longleftrightarrow L-J$是对偶

理想；

(3)若L有单位元I，$F(L)=\{A \mid A\subseteq L, A\neq\varnothing$且$A$中任意有限多个元素之并不等于$I\}$，则$J$是$L$的极大理想$\Longleftrightarrow J$是偏序集$(F(L),\subseteq)$中的极大元(其中$\subseteq$是集合包含关系)．

证 (1)若J是L的素理想，易证$L-J$是L的真对偶理想．如有$a\vee b\in L-J$，即$a\vee b\notin J$，由于J是L的理想，必有$a\notin J$或$b\notin J$，故$L-J$是素对偶理想．反之，由对偶原则，若$L-J$是素对偶理想，则J是素理想．

(2)是(1)的推论．

(3)设$J\in F(L)$是极大元，则$\varnothing\neq J\subseteq L$而$J$中任意有限多个元素之并不等于$I$．任取$a$，$b\in J$，显然$J\cup\{a\vee b\}\in F(L)$．由$J$的极大性知$J=J\cup\{a\vee b\}$，因此$a\vee b\in J$．类似可证若$x\leqslant a$，$a\in J$，$x\in L$，必有$x\in J$．因此$J$是$L$的真理想．设$J'$是$L$的理想且$J\subseteq J'$，若$J'\neq L$，必有$J'\in F(L)$．再由$J$的极大性知$J=J'$，故$J$是$L$的极大理想．反之，设$J$是$L$的极大理想，显然$J\in F(L)$．应用Zorn引想知$F(L)$中有极大元$J'\supseteq J$．由已证的充分性知$J'$也是$L$的极大理想，故$J=J'$是$F(L)$的极大元．▌

在Boole格中，素理想与极大理想是等价的．

定理5 设L是非平凡(即至少有2个元素)的Boole格，P是L的理想，则P是L的素理想$\Longleftrightarrow P$是L的极大理想．

证 设P是素理想．若另有L的理想$J\supseteq P$而$P\neq J$，则存在$a\in J-P$．由于$a\wedge a'=O\in P$且P是素理想，必有$a'\in P$．于是$I=a\vee a'\in J$，由此推得$J=L$，故P是L的极大理想．反之，设P是L的极大理想．若$a\wedge b\in P$而$a\notin P$，则$(a]\vee P$真包含P，于是$I\in(a]\vee P=L$．由定理3(3)知存在$x\in P$使

$Ia=\bigvee x$. 于是

$$b=I\wedge b=(a\vee x)\wedge b=(a\wedge b)\vee(x\wedge b)\in P.$$

故P是素理想. ▮

练　习

1. 补证推论2及推论3.

2. 设 X 是任意无限集. 证明: X的幂集格 $L=P(X)$是一个完备的Boole格, 但L, L却不是Boole格.

3. 证明: 在有 I 的分配格中, 极大理想必是素理想.

§3.4 格的同态

设L, M是任意格. 映射θ: $L\longrightarrow M$叫做一个**并同态**,如果满足

(1)$\theta(x\vee y)=\theta(x)\vee\theta(y)$, $\forall x, y\in L$;

对偶地, θ 叫做一个**交同态**, 如果满足

(2)$\theta(x\wedge y)=\theta(x)\wedge\theta(y)$, $\forall x, y\in L$;

当 θ 同时满足(1)和(2)时, 则称θ是**格同态**(或简称**同态**).

设θ: $L\longrightarrow M$是格同态. 若θ是单射, 则称θ为**单同态**; 若θ是满射,则称θ为**满同态**,这时也说格L与格M同态, 记作$L\sim M$;若 θ 是双射, 则称 θ 为**格同构**(简称**同构**), 也说格L同构于格M,记作$L\cong M$. 若$L=M$, 相应的同态(同构)叫做L的**自同态**(**自同构**).

相仿地, 在并(交)半格中可定义**并(交)同态**、**并(交)同构**等概念.

定理1 对任意并半格L, M及映射θ: $L\longrightarrow M$,

(1)若 θ 是并同态，则θ是序同态；

(2)若 θ 是序同态，则

$$\theta(x\vee y)\geqslant\theta(x)\vee\theta(y),\ \forall x,\ y\in L;$$

(3)θ 是并同构$\Longleftrightarrow\theta$ 是序同构.

证 (1)设 θ 是并同态. 若$x\leqslant y, x, y\in L$, 则$x\vee y=y$, 从而$\theta(y)=\theta(x\vee y)=\theta(x)\vee\theta(y)$, 于是得 $\theta(x)\leqslant\theta(y)$. 故 θ 为序同态.

(2)显然.

(3)设 θ 为并同构，即 θ 为双射又是并同态. 由(1)知θ是序同态，因此若$x\leqslant y$, $x, y\in L$, 则有 $\theta(x)\leqslant\theta(y)$. 反之，若$\theta(x)\leqslant\theta(y)$, 则 $\theta(y)=\theta(x)\vee\theta(y)=\theta(x\vee y)$. 由于$\theta$是双射，必有$x\vee y=y$. 因此$x\leqslant y$, 故$\theta$为序同构.

设θ为序同构，则θ是双射并且$\theta(x)\leqslant\theta(y)\Longleftrightarrow x\leqslant y$($\forall x, y\in L$). 任取$x, y\in L$, 存在$z\in L$, 使得$\theta(z)=\theta(x)\vee\theta(y)$. 显然$\theta(x)\leqslant\theta(z)$且$\theta(y)\leqslant\theta(z)$, 于是 $x\leqslant z$ 且$y\leqslant z$, 从而$x\vee y\leqslant z$, $\theta(x\vee y)\leqslant\theta(z)$. 由(2)知$\theta(x\vee y)\geqslant\theta(z)$. 因此$\theta(x\vee y)=\theta(z)=\theta(x)\vee\theta(y)$. 故$\theta$为并同构. ▌

由对偶原则得

定理1′ 对任意交半格L, M及映射θ: $L\longrightarrow M$,

(1)若 θ 是交同态，则 θ 是序同态；

(2)若 θ 是序同态，则

$$\theta(x\wedge y)\leqslant\theta(x)\wedge\theta(y),\ \forall x,\ y\in L;$$

(3)θ 是交同构$\Longleftrightarrow\theta$ 是序同构. ▌

下述推论是显然的.

推论1 设L, M是格，对于映射θ: $L\longrightarrow M$, 下述条件等价：

(1) θ是格同构；

(2) θ是并同构；

(3) θ是交同构；

(4) θ是序同构. ▮

推论2 若θ是格L到格M的同构映射，则θ^{-1}是M到L的同构映射. ▮

一般地，序同态未必是并同态(交同态)，并同态(交同态)也未必是交同态(并同态).

例1 在图3.4.1中(a)—(d)分别给出了4元格L到4元链M间的4个映射：

(a)是序同态但非并同态，亦非交同态；

(b)是并同态但非交同态；

(c)是交同态但非并同态；

(d)既是交同态，又是并同态(即格同态).

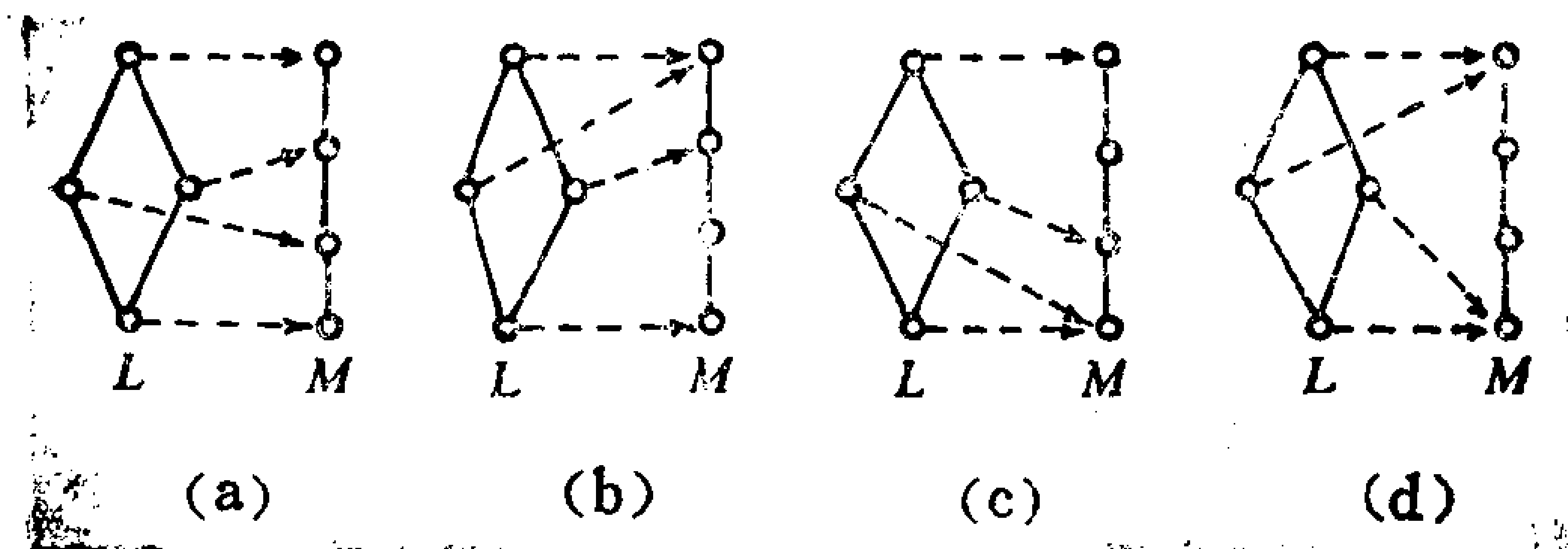


图 3.4.1

定理2 设L，M是格，θ：$L\longrightarrow M$是格满同态，

(1)若J是L的子格(理想或对偶理想)，则$\theta(J)$是M的子格(理想或对偶理想)；

(2)若H是M的子格(理想或对偶理想)，则$\theta^{-1}(H)$是L的子格(理想或对偶理想)；

(3)若L有零元O(单位元I)，则M有零元$\theta(O)$(单位元$\theta(I)$)；

(4)若L是模格(分配格或有补格)，则M亦然.

证明留给读者. ▮

设θ: $L\longrightarrow M$是格同态，M有泛界O,I. 分别称$\theta^{-1}(O)$(O的完全原象)与$\theta^{-1}(I)$(I的完全原象)为θ的**核**及**对偶核**，记作$\mathrm{Ker}\theta=\theta^{-1}(O)$，$\mathrm{D\text{-}Ker}\theta=\theta^{-1}(I)$.

推论3 设θ: $L\longrightarrow L'$是格同态，格L'有泛界O,I，则

(1)θ的核(对偶核)是L的理想(对偶理想)；

(2)若θ是满同态且$L'=\{O, I\}$是2元格，则θ的核(对偶核)是L的素理想(素对偶理想). 反之，L的任何素理想(素对偶理想)一定是L到L'的某一满同态的核(对偶核)；

(3)L的素理想(素对偶理想)的集合与L到二元格$L'=\{O, I\}$的满同态集合之间存在双射.

证 由定理2知(1)成立. 设θ是满同态且$L'=\{O, I\}$是2元格. 显然$\mathrm{D\text{-}Ker}\theta=L\text{-}\mathrm{Ker}\theta$. 由(1)及§3.3定理4知$\mathrm{Ker}\theta$是$L$的素理想，$\mathrm{D\text{-}Ker}\theta$是$L$的素对偶理想. 反之，若$J$是$L$的素理想，定义映射$\theta'$: $L\longrightarrow L'$，使得对任意$x\in L$,

$$\theta'(x)=\begin{cases}I, & 若x\in J;\\ O, & 若x\in J.\end{cases}$$

易证θ'为格满同态，并且$J=\mathrm{Ker}\theta'$. 类似可证L的任一素对偶理想是L到L'的某一满同态的对偶核. 因此(2)成立. 由(2)直接得(3). ▮

若θ: $L\longrightarrow M$是格的单同态，易见$\theta(L)=\mathrm{Im}\theta$是$M$的子

格，并且$L\cong\theta(L)$．这时称θ为格的**嵌入映射**，也说L可以**同构嵌入**到M之中．

定理3 设L是任意格，$a\in L$．

(1)映射ψ_a: $x\mapsto x\vee a$是L到主对偶理想$[a)$上的并同态，且$\mathrm{Ker}\psi_a=(a]$；

(2)映射φ_a: $x\mapsto x\wedge a$是L到主理想$(a]$上的交同态，且D-$\mathrm{Ker}\varphi_a=[a)$；

(3)映射θ: $a\mapsto(a]$是L到理想格$\hat{L}$(或$\bar{L}$)内的单同态，并且$\theta(L)=L^*$．从而L可同构嵌入到$\hat{L}$(或$\bar{L}$)之中，并且$L\cong L^*$．

证 (1)，(2)显然，下证(3)．任取a，$b\in L$，显然$(a]=(b]$当且仅当$a=b$，因此θ为单射．由§3.3推论2知θ为单同态．余下结论显然成立．▌

推论4 设L是任意格，则

(1)L可以嵌入到一个完备格之中；

(2)若L满足极大条件(特别地，若L有限长)，则

$$L\cong\bar{L}=L^*.$$

证 由定理3(3)及§3.3定理2、定理3即可得证．▌

推论5 对任意格L，下述条件等价：

(1)L是模格(分配格)；

(2)$\hat{L}$是模格(分配格)；

(3)L可嵌入到一个完备的模格(分配格)之中．

证 由定理3(3)，§3.2定理3(5)，定理5(4)及§3.3推论3即可得证．▌

可以通过Hasse图判断有限格是否同构．两个有限格L

与L'同构当且仅当L的示图中最下层元素同L'的示图中最下层元素存在一一对应，L的次下层元素同L'的次下层元素存在一一对应…，并且相对应元素的上邻元个数也相同，相应的邻元也一一对应.

例2 非同构的2元格只有一个；非同构的3元格也只有一个；非同构的4元格只有二个；非同构的5元格只有五个．其示图如下：

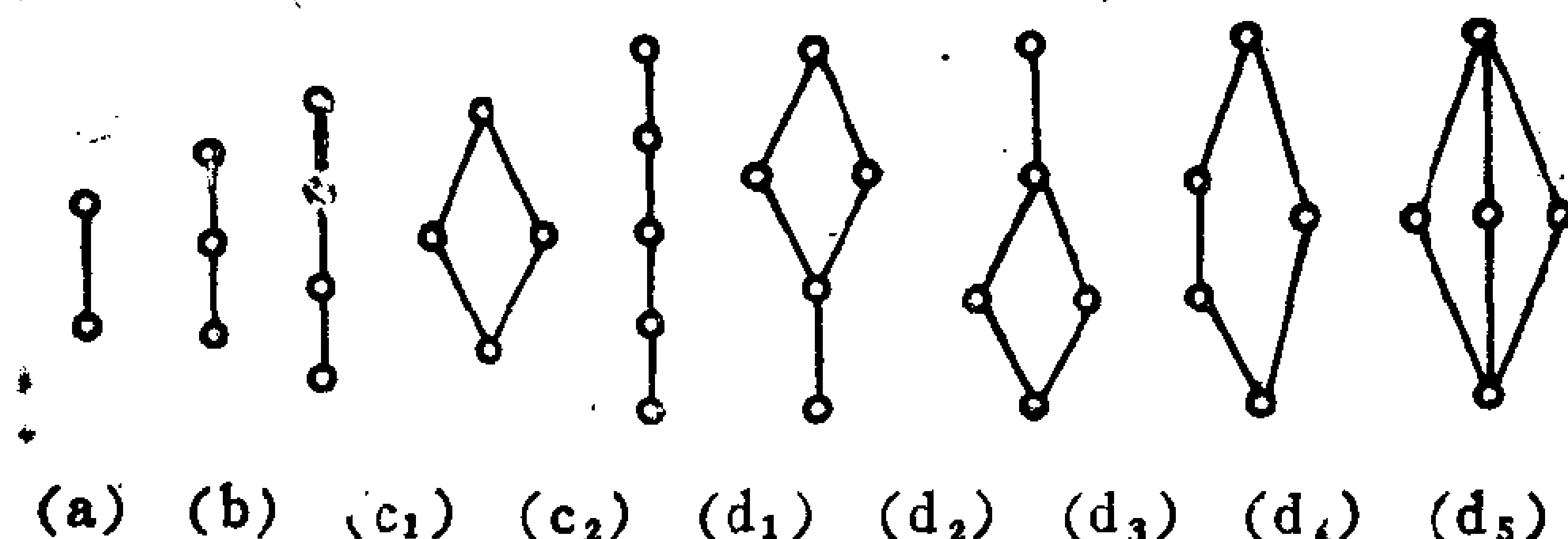


图3.4.2

读者可以验证，非同构的6元格共有16个(练习3)。

练　　习

1．补证推论1，推论2及定理2.

2．设L是有$I(I\neq O)$的分配格．证明：一定存在L到二元格$L'=\{O,\ I\}$上一个满同态.

3．画出所有不同构的6元格的Hasse图．(提示：在所有不同构的4元偏序集的示图上分别添加泛界O，I)

§3.5　同 余 关 系

设θ是格L的一个等价关系．如果对任意的x_i，$y_i\in L$，

$i=1, 2$)，由 $x_i \equiv y_i$ (mod θ)① ($i=1,2$) 可推出 $x_1 \vee x_2 \equiv y_1 \vee y_2$ (mod θ)，则称θ为L上的**并同余关系**（简称**并同余**）；对偶地，如果由$x_i \equiv y_i$ (mod θ) ($i=1,2$) 可推出 $x_1 \wedge x_2 \equiv y_1 \wedge y_2$ (mod θ)，则称 θ 为L上的**交同余关系**（简称**交同余**）；若θ 既是并同余，又是交同余，则称θ为L上的**格同余关系**（简称**格同余**）.

类似地，在并半格或交半格中也可相应地定义并同余关系或交同余关系.

定理1 设θ是格L的一个等价关系，则

(1) θ是并同余关系$\Longleftrightarrow \forall a, b, x \in L, a \equiv b$ (mod θ) 蕴涵$a \vee x \equiv b \vee x$ (mod θ)；

(2) θ是交同余关系$\Longleftrightarrow \forall a, b, x \in L, a \equiv b$ (mod θ)蕴涵$a \wedge x \equiv b \wedge x$ (mod θ)；

(3) θ是格同余关系$\Longleftrightarrow \forall a, b, x \in L, a \equiv b$ (mod θ)蕴涵$a \vee x \equiv b \vee x$ (mod θ)，$a \wedge x \equiv b \wedge x$ (mod θ).

证 (1)设θ是并同余，对任意的$a, b, x \in L$，显然$x \equiv x$ (mod θ). 若$a \equiv b$ (mod θ)，必有$a \vee x \equiv b \vee x$ (mod θ). 反之，设上述条件成立. 若 $a_i \equiv b_i$ (mod θ) ($i=1, 2$)，则$a_1 \vee a_2 \equiv b_1 \vee a_2 \equiv b_1 \vee b_2$ (mod θ)，故θ是并同余.

由对偶原则可得(2). 由(1)，(2)可得(3). ▌

推论1 设θ是格L的格同余关系，$a, b \in L$，则下述条件等价：

(1) $a \equiv b$ (mod θ)；

(2) $a \wedge b \equiv a \vee b$ (mod θ)；

---

① $x_i \equiv y_i$ (mod θ) 意指 $x_i \theta y_i$.

(3) $x\equiv y(\mathrm{mod}\ \theta)$, $\forall x, y\in[a\wedge b, a\vee b]$.

证明留作练习. ▌

利用格同余关系可构造出另外的格.

定理2 设L是任意格，θ是L的格同余关系. 在L关于θ的商集L/θ中规定：

$[a]\wedge[b]=[a\wedge b]$, $[a]\vee[b]=[a\vee b]$ $(\forall a, b\in L)$,

则 (1) $(L/\theta, \wedge, \vee)$成为一个格；

(2) 自然映射 π: $L\to L/\theta$ 是格满同态，若 L 有零元O，则 $\mathrm{Ker}\pi=[O]$.

证 (1) 由于 θ 是格同余关系，并且

$$[a]=[b]\Longleftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta),$$

因此在商集L/θ中规定的$\wedge$, $\vee$运算是合理的(即与代表元选取无关). 容易验证 L1—L4 成立，故 $(L/\theta, \wedge, \vee)$成为一个格，其中序关系为：

$$[a]\leqslant[b]\Longleftrightarrow a\equiv a\wedge b(\mathrm{mod}\ \theta)$$

(见§3.1定理4).

(2) 直接验证知π是格满同态. 若L有零元O，则格L/θ也有零元$[O]$，它在π下的完全原象正是O所在的等价类（即$[O]$). 因此$\mathrm{Ker}\pi=[O]$. ▌

称上面得到的格L/θ为L关于格同余θ的**商格**，仍用L/θ表示. 格同态π叫做**自然同态**.

由格同态也可得到格同余.

定理3 设φ是从格L到L'的格同态映射. 在L中如下定义一个二元关系θ_φ:

$$\forall a, b\in L, a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta_\varphi)\Longleftrightarrow\varphi(a)=\varphi(b),$$

则 (1) θ_φ 是 L 的格同余关系；

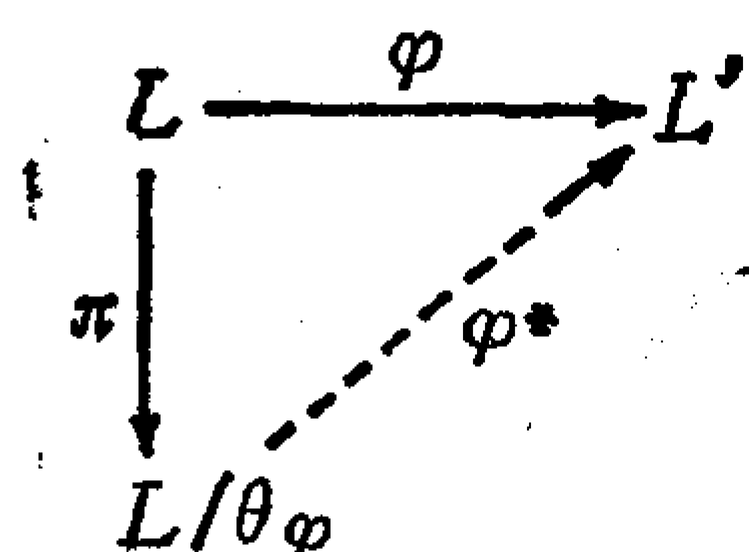


图 3.5.1

(2)若 π: $L \to L/\theta_\varphi$ 是自然同态，则存在唯一的格同态 φ^*: $L/\theta_\varphi \to L'$，使得

$\varphi = \varphi^* \pi$ （即使左图可交换）；

(3) φ^* 是单同态，因而

$L/\theta_\varphi \cong \varphi(L)$；

(4) φ^* 是格同构 $\Longleftrightarrow \varphi$ 为满同态.

证 (1)由§1.4定理3知 θ_φ 是 L 的等价关系. 由于 φ 是格同态，若 $\varphi(a_i)=\varphi(b_i)$ $(i=1, 2)$，必有

$$\varphi(a_1 \vee a_2)=\varphi(b_1 \vee b_2), \quad \varphi(a_1 \wedge a_2)=\varphi(b_1 \wedge b_2),$$

即 $a_i \equiv b_i (\text{mod } \theta_\varphi)$ 蕴涵

$$a_1 \vee a_2 \equiv b_1 \vee b_2 (\text{mod } \theta_\varphi), \quad a_1 \wedge a_2 \equiv b_1 \wedge b_2 (\text{mod } \theta_\varphi).$$

故 θ_φ 是 L 的格同余关系.

由§1.4定理3知满足(2)—(4)中要求的 φ^* 是存在的，其中 $\varphi^*([a])=\varphi(a)$ $(\forall [a] \in L/\theta_\varphi)$. 还需证明 φ^* 是格同态. 这一点由 φ^* 的定义是明显的. ▌

对于并半格或交半格有同定理2、定理3相仿的结果.

同余关系与理想有密切的联系.

定理4 设 L 是任意格，$J \neq \varnothing$ 是 L 的理想. 在 L 中如下规定一个二元关系 θ_J：

$$\forall a, b \in L, \ a \equiv b (\text{mod } \theta_J)$$
$$\Longleftrightarrow \text{存在 } d \in J \text{ 使得 } a \vee d = b \vee d,$$

则 (1) θ_J 是 L 的并同余关系；

(2)若 L 是分配格，则 θ_J 是格同余关系.

证 (1)显然 θ_J 满足自反性和对称性. 若有

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\ \theta_J) \quad 且 \quad b \equiv c(\mathrm{mod}\ \theta_J),$$

则存在$d_1, d_2 \in J$，使得$a \vee d_1 = b \vee d_1$，$b \vee d_2 = c \vee d_2$.
于是

$$a \vee (d_1 \vee d_2) = b \vee (d_1 \vee d_2) = c \vee (d_1 \vee d_2),$$

其中$d_1 \vee d_2 \in J$（因 J 是理想），即$a \equiv c(\mathrm{mod}\ \theta_J)$，传递性成立．故$\theta_J$是$L$的等价关系．若$a \equiv b(\mathrm{mod}\ \theta_J)$，即存在 $d \in J$使$a \vee d = b \vee d$．对任意$x \in L$，显然有

$$(a \vee x) \vee d = (b \vee x) \vee d,$$

因此 $a \vee x \equiv b \vee x(\mathrm{mod}\ \theta_J)$．由定理 1知 θ_J 是并同余关系．

(2) 设 L 是分配格，$a \equiv b(\mathrm{mod}\ \theta_J)$，则存在 $d \in J$ 使得 $a \vee d = b \vee d$．对任意$x \in L$，利用分配律，

$$\begin{aligned}(a \wedge x) \vee (d \wedge x) &= (a \vee d) \wedge x \\ &= (b \vee d) \wedge x = (b \wedge x) \vee (d \wedge x).\end{aligned}$$

因 J 是理想且 $d \in J$，故$d \wedge x \in J$，于是 $a \wedge x \equiv b \wedge x(\mathrm{mod}\ \theta_J)$．由定理1知 θ_J 是L的交同余关系．再由(1)知θ_J 是L的格同余关系．▌

推论2 在有零元O的分配格L中，任一非空理想J 都是L到某一分配格L'上满同态的核.

证 由定理 4(2) 可知 θ_J 是 L 的格同余关系．容易证明 $a \equiv O(\mathrm{mod}\ \theta_J) \Longleftrightarrow a \in J$．再由定理2知结论成立．▌

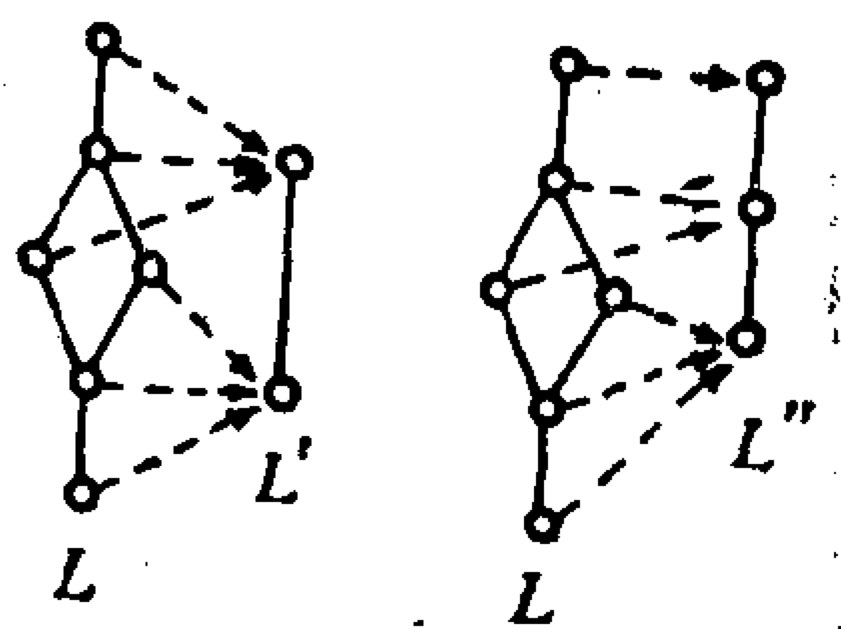


图 3.5.2

值得注意的是，在一个格同态映射下，其同态象(在同构意义下)并不能由核唯一确定．这一点同群或环是不同的．例如在图3.5.2中，(a)，(b)分别给出

了6元格L的两个不同的同态，但其核相同.

对于分段有补格，上述情况不会发生.

设J是格L的非空理想，如下定义L的一个二元关系τ_J：

$\forall a,b\in L, a\equiv b(\mathrm{mod}\ \tau_J)\Longleftrightarrow$存在$c\in J$使得$(a\wedge b)\vee c=a\vee b$.

若τ_J是L的格同余关系，则称J是L的**标准理想**.

推论3 设L是分配格，J是L的任意非空理想，则

(1) $\forall a, b\in L, a\equiv b(\mathrm{mod}\ \tau_J)\Longleftrightarrow a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta_J)$；

(2) J是L的标准理想.

证 (1)若$a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta_J)$，则存在$d\in J$使得$a\vee d=b\vee d$. 由分配律及吸收律得

$$(a\wedge b)\vee(d\wedge b)=b,\quad (a\wedge b)\vee(a\wedge d)=a.$$

于是$(a\wedge b)\vee c=a\vee b$，其中$c=(d\wedge b)\vee(a\wedge d)\in J$. 因此$a\equiv b(\mathrm{mod}\ \tau_J)$. 反之，若$a\equiv b(\mathrm{mod}\ \tau_J)$，则存在$c\in J$使得$(a\wedge b)\vee c=a\vee b$. 由吸收律及结合律得

$$a\vee c=(a\vee(a\wedge b))\vee c=a\vee(a\vee b)=a\vee b.$$

同理有$b\vee c=a\vee b$，因此$a\vee c=b\vee c$，即$a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta_J)$.

由定理4(2)及标准理想的定义知(2)成立. ▮

定理5 设L(有O)是分段有补格，θ是L的格同余关系. 令$K(\theta)=\{x\mid x\in L, x\equiv O(\mathrm{mod}\ \theta)\}$，则

(1) $\forall a, b\in L, a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta)\Longleftrightarrow$存在$c\in K(\theta)$使得$(a\wedge b)\vee c=a\vee b$；

(2) $K(\theta)$是L的标准理想；

(3) L的所有标准理想同L的所有格同余关系之间存在一一对应.

证 (1)设$a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta)$，由推论1知$a\wedge b\equiv a\vee b(\mathrm{mod}\ \theta)$.

取c为 $a\wedge b$ 在 $a\vee b$ 内的补元，则$(a\wedge b)\wedge c=O$，$(a\wedge b)\vee c=a\vee b$. 由定理 1 得

$$c=(a\vee b)\wedge c\equiv(a\wedge b)\wedge c=O\quad(\mathrm{mod}\ \theta),$$

因此$c\in K(\theta)$. 反之，若存在$c\in K(\theta)$使得$(a\wedge b)\vee c=a\vee b$，则$c\equiv O(\mathrm{mod}\ \theta)$，并且有

$$a\wedge b=(a\wedge b)\vee O\equiv(a\wedge b)\vee c=a\vee b\quad(\mathrm{mod}\ \theta).$$

因此由推论 1 得$a\equiv b(\mathrm{mod}\ \theta)$.

(2)由 § 3.4推论3及本节定理2知$K(\theta)$是L的理想. 再由(1)知$K(\theta)$是L的标准理想.

由(1)，(2)及标准理想之定义知(3)成立. ▌

推论4 若L是分段有补格，则L的同态象(在同构意义下)由同态核唯一确定.

证 设φ：$L\to L'$及ψ：$L\to L''$是格满同态，且 $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$. 由定理 3 知$\varphi$，$\psi$ 确定L的格同余关系 θ_φ及θ_ψ，并且$L'\cong L/\theta_\varphi$，$L''\cong L/\theta_\psi$. 易证$\mathrm{Ker}\varphi=K(\theta_\varphi)$，$\mathrm{Ker}\psi=K(\theta_\psi)$. 由定理5(1)知$\theta_\varphi=\theta_\psi$，于是$L'\cong L/\theta_\varphi=L/\theta_\psi\cong L''$. ▌

推论5 设L是分段有补格且满足极大条件，θ是L的格同余关系，则存在$a\in L$，使得

(1) $\forall x,\ y\in L,\ x\equiv y(\mathrm{mod}\ \theta)\Longleftrightarrow x\vee a=y\vee a$；

(2)映射ψ_a：$[x]\mapsto x\vee a$是商格 L/θ 到区间子格$[a,I]$上的格同构.

证 (1)由定理 5(2)及 § 3.3 定理 2 知$K(\theta)$是L的标准理想，并且存在$a\in L$使得$K(\theta)=(a]$. 对任意x，$y\in L$，若$x\equiv y(\mathrm{mod}\ \theta)$，则存在$d\in(a]$使得$(x\wedge y)\vee d=x\vee y$. 于是

$$x\vee d=x\vee(x\wedge y)\vee d=x\vee y.$$

同理证$y\vee d=x\vee y$，因此$x\vee d=y\vee d$. 由于$d\leqslant a$，故$x\vee a$

$=y\vee a$. 反之，若$x\vee a=y\vee a$，由于$a\in(a]=K(\theta)$，因此$a\equiv O(\mathrm{mod}\,\theta)$，从而$x\equiv x\vee a=y\vee a\equiv y\ (\mathrm{mod}\,\theta)$，故(1)成立.

(2)由(1)知ψ_a定义合理，且ψ_a为单射. 对任意$y\in[a, I]$，显然$\psi_a([y])=y\vee a=y$. 因此ψ_a是满射，从而ψ_a为双射. 易见ψ_a是并同构，由§3.4推论1知ψ_a是商格L/θ到区间子格$[a, I]$的格同构. ▌

特别地，对于有限长的相对有补格，上述结论为真.

在§1.3中我们曾定义了二元关系的交、并、积等运算及包含关系⊆. 不难证明下述结果.

定理6 设L是任意格，则

(1) L的任意多个格同余关系的交仍是L的格同余关系；

(2) L的全体格同余关系组成的集合$\theta(L)$关于二元关系的包含关系⊆构成完备的分配格.

证明留作练习. ▌

若L是**非平凡格**(即L至少有2个元素)，则$\theta(L)$至少包含全关系U及恒等关系E，U与E均叫做L的**平凡同余**(或**当然同余**). 任何异于U，E的格同余关系叫做L的**真同余关系**. 若L没有真同余关系，则称L为**简单格**.

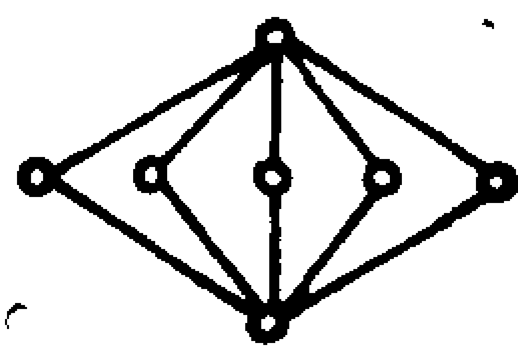


图 3.5.3

图3.5.3给出了一个简单格的例子. 数域P上n维向量空间的全体子空间格也是简单格.

有关简单格的进一步讨论将在第六、七两章进行.

练　习

1. 补证推论1及定理6.

2. 若θ是格L的格同余关系，证明：L关于θ的每一个等价类是L的凸子格（见§3.1练习3）.

3. 设A是格L的同余关系格$\theta(L)$（见定理6）中的线性序子集. 令$\theta=\vee A$，证明：对任意a，$b\in L$，$a\equiv b(\bmod\ \theta)$ $\Longleftrightarrow$对某个$\theta_a\in A$，使得$a\equiv b(\bmod\ \theta_a)$.

4. 设L是有泛界O，I的格$(O\neq I)$，A是同余关系格$\theta(L)$中不包含U（全关系）的极大链（应用Zorn引理知这样的极大链是存在的）. 令$\rho=\vee A$，证明：

(1) ρ是同余关系格$\theta(L)$中的对偶原子（即U的下邻）；

(2) L关于ρ的商格L/ρ是简单格.

（提示：若θ^*是商格L/ρ的格同余关系，规定：$\forall a,b\in L$，$a\equiv b(\bmod\ \theta)\Longleftrightarrow[a]\equiv[b](\bmod\ \theta^*)$，则$\theta\in\theta(L)$，并且$\rho\subseteq\theta$由此推出$\theta^*$是平凡同余.）

§3.6　格的表示

集合X的幂集格$P(X)$的任意子格（即X上的子集环）叫做X上的**集格**. 幂集格是完备的Boole格，集格是分配格.

若φ是格L到集合X上某集格的（格）满同态，则称φ是格L按X的一个**表示**（简称φ是L的一个表示）；若φ是格同构时，则称φ是格L按X的一个**同构表示**（简称φ是L的一个同构表示）.

显然，若L有一个同构表示，则L一定是分配格．其逆亦真(见§7.2)．

例1 设$(L,\mid)$是一个格，其中$L=\{1,2,3,4,6,12\}$，$\mid$是数的整除关系(见§3.2例4)．$X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$是一个4元集．图3.6.1给出了格L按X的两个表示，其中(b)是同构表示．

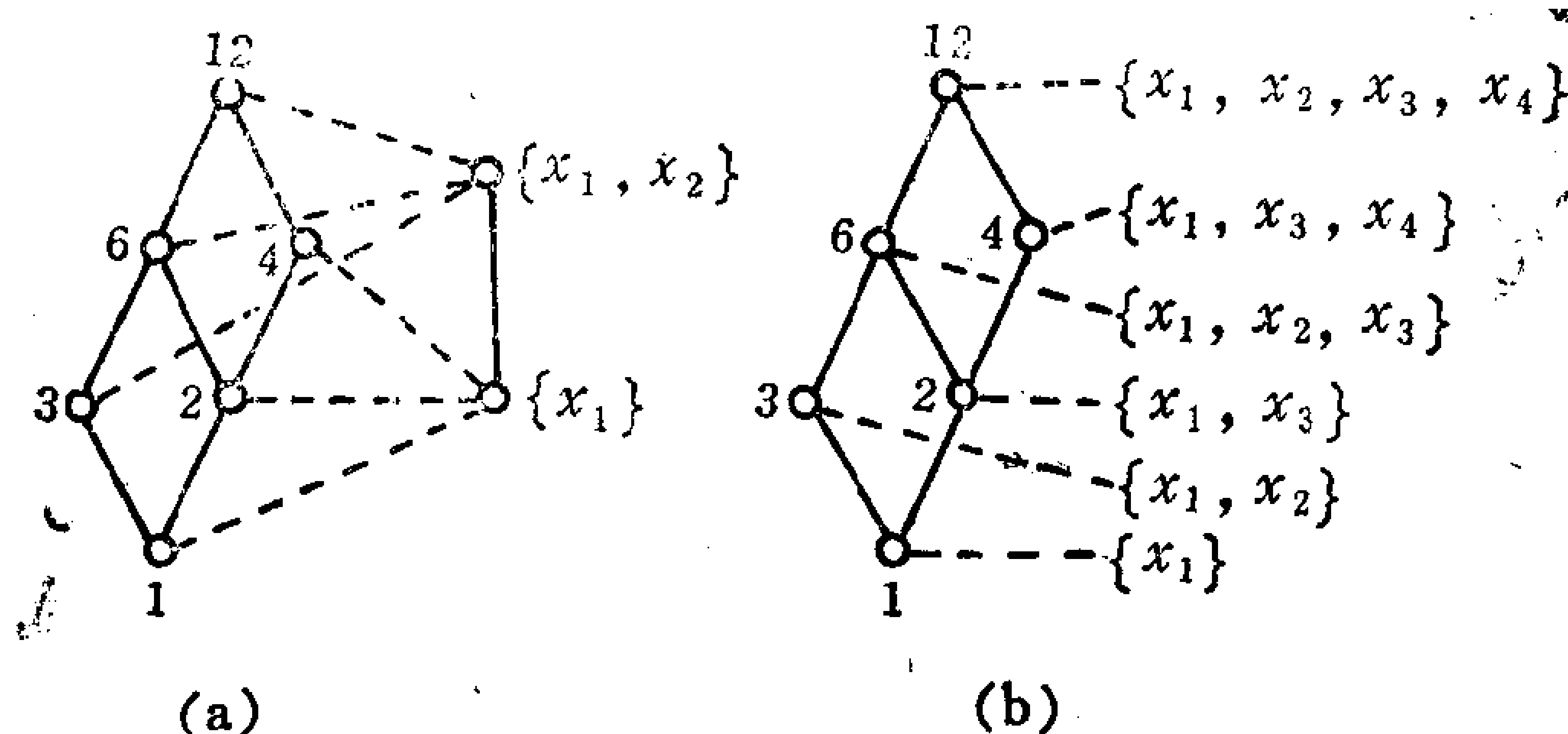


图 3.6.1

例2 设L是任意格，X是空集，则X的幂集格$P(X)=\{\varnothing\}$是一元格．显然L按X的表示只有一个$\varphi: x\mapsto\varnothing, \forall x\in L$．称它为$L$的**零表示**．

例3 设φ是格L按集合X的一个表示，X'是X的子集．令$\varphi'(a)=\varphi(a)\cap X'$，$\forall a\in L$，则$\varphi'$是$L$按$X'$的一个表示，称之为由$\varphi$导出的**子表示**(简称为$\varphi$的子表示)，记作$\varphi_{X'}$．零表示可看作任何表示的子表示．

设φ_i是格L按X_i的表示$(i=1, 2)$．如果存在双射$\psi: X_1\to X_2$，使得$\varphi_2(a)=\psi(\varphi_1(a))$，$\forall a\in L$，则称$\varphi_1$与$\varphi_2$是**等值表示**；若由$\varphi_1$与$\varphi_2$所决定的$L$的格同余关系(§3.5定理3)相

等，则称φ_1与φ_2是**等价表示**.

抽象地看，等值表示可认为是实质相同的表示，等价表示可认为是表示的效果相同. 显然等值与等价都是格表示集合中的等价关系.

格L按集合X的一个表示φ叫做**有意表示**，如果满足

(1) $$\bigcap_{a\in L}\varphi(a)=\varnothing,\ \bigcup_{a\in L}\varphi(a)=X;$$

(2)若$x\neq y$，x，$y\in X$，则存在$a\in L$，使得$x\in\varphi(a)$而$y\overline{\in}\varphi(a)$ 或$y\in\varphi(a)$而$x\overline{\in}\varphi(a)$.

定理1 对任意格L,

(1)等值表示一定是等价表示;

(2)若φ_1，φ_2是L的等价表示，则有格同构

$$\varphi_1(L)\cong\varphi_2(L);$$

(3)L的零表示是有意表示，L的有意表示的子表示仍是有意表示;

(4)L的任意表示φ都等价于L的一个有意表示.

证 只证(4)，其余留作练习.

设φ是L按X的一个表示. 在X中如下规定一个二元关系$\sim$:

$$x\sim y\Longleftrightarrow\forall a\in L,\ 或\{x,\ y\}\subseteq\varphi(a)$$
$$或\{x,\ y\}\cap\varphi(a)=\varnothing,$$

易证$\sim$是X的一个等价关系. 在商集$X/\sim$的每一个等价类中各取定一个代表元(这要用到选择公理)组成X的一个子集A. 令

$$X'=\left(\bigcup_{a\in L}\varphi(a)-\bigcap_{a\in L}\varphi(a)\right)\cap A,$$

则不难证明在X'上导出的φ的子表示$\varphi_{X'}$是L的一个有意表示，并且与φ等价. ▌

定理2 设L是任意格，Ω_0表示由L的全体素对偶理想组成的集合. 对于任意$a\in L$，令

$$\Phi(a)=\{P\mid P\in\Omega_0\text{且}a\in P\},$$

则Φ是L按集合Ω_0的一个有意表示.

证 先证Φ是L的表示. 若a，$b\in L$，则

$$\Phi(a)=\{P\mid P\in\Omega_0\text{且}a\in P\},$$
$$\Phi(b)=\{P\mid P\in\Omega_0\text{且}b\in P\},$$
$$\Phi(a\wedge b)=\{P\mid P\in\Omega_0\text{且}a\wedge b\in P\},$$
$$\Phi(a\vee b)=\{P\mid P\in\Omega_0\text{且}a\vee b\in P\}.$$

由§3.3定理4易证：若$P\in\Omega_0$，则$a\wedge b\in P$当且仅当$a\in P$且$b\in P$. 由此推知$\Phi(a\wedge b)=\Phi(a)\cap\Phi(b)$. 同理证$\Phi(a\vee b)=\Phi(a)\cup\Phi(b)$. 故$\Phi$是$L$的一个表示.

其次证Φ是有意表示. 若存在$P\in\bigcap_{a\in L}\Phi(a)$，则$a\in P$，$P\in\Phi(a)$($\forall a\in L$)，由此得$P=L$. 与$P$是真对偶理想矛盾，因此$\bigcap_{a\in L}\Phi(a)=\varnothing$. 若$P\in\Phi_0$，则$P\neq\varnothing$，因此有$a\in P(a\in L)$，即$P\in\Phi(a)$. 于是$\bigcup_{a\in L}\Phi(a)=\Omega_0$. 设$P\neq Q$，$P$，$Q\in\Omega_0$，则或存在$a\in L$使得$a\in P-Q$，或存在$b\in L$使得$b\in Q-P$. 前者有$\Phi(a)$含$P$不含$Q$，后者有$\Phi(b)$含$Q$不含$P$. 故$\Phi$是$L$的有意表示. ▌

称上述表示Φ为格L的**完全表示**.

推论1 任何格L都有完全表示，完全表示是有意表示. ▌

在某种意义下，完全表示是格表示的一般原型.

定理3 格L的任何有意表示都等值于完全表示的一个

子表示.

证 设φ是L按集合X的一个有意表示. 若$X=\varnothing$，则φ为零表示，结论显然成立. 因此假定$X\neq\varnothing$，下面分四步来证.

(1)对于任意$x\in X$，令φ_x表示在单元集$\{x\}$上导出的φ的子表示. 由于φ是有意表示，容易证明φ_x是L到二元格$\{\varnothing, \{x\}\}$上的满同态，其对偶核

$$J_x=\text{D-Ker}\varphi_x=\{a \mid a\in L\text{且}x\in\varphi(a)\}$$

是L的素对偶理想(§3.4推论3)，即$J_x\in\Omega_0$.

(2)若$x, y\in X$，$x\neq y$. 因为φ是有意表示，于是存在$a\in L$使得或$x\in\varphi(a)$而$y\bar{\in}\varphi(a)$或$y\in\varphi(a)$而$x\bar{\in}\varphi(a)$. 由此知$J_x\neq J_y$.

(3)令$\Omega=\{J_x \mid x\in X\}$，那么$\Omega$是$\Omega_0$的子集. 令$\psi: X\to\Omega$，使$\psi(x)=J_x(\forall x\in X)$. 由(1)，(2)知$\psi$是双射.

(4)令$\Phi'=\Phi_\Omega$是L的完全表示Φ在Ω上导出的子表示，则对任意$a\in L$，有

$$\begin{aligned}\Phi'(a)&=\Phi(a)\cap\Omega=\{J_x \mid x\in X\text{且}a\in J_x\}\\&=\{J_x \mid x\in X\text{且}x\in\varphi(a)\}\\&=\psi(\varphi(a)).\end{aligned}$$

故φ与Φ'等值. ∎

所谓集合上X的一个**拓扑**是指X的一个子集族$\mathscr{T}$满足下述性质：

(1)$X, \varnothing\in\mathscr{T}$；

(2)若$A, B\in\mathscr{T}$，则$A\cup B\in\mathscr{T}$；

(3)若$A_i\in\mathscr{T}(i\in I$，I是指标集)，则$\bigcap_{i\in I}A_i\in\mathscr{T}$.

这时也称$(X, \mathscr{T})$是一个**拓扑空间**. $\mathscr{T}$中的子集叫做**闭集**；

$A\subseteq X$叫做**开集**当且仅当$X-A$是闭集．若$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的子集且对任意$A\in\mathscr{T}$，存在$\mathscr{B}$的子集族 $\{B_j\mid j\in J\}$ 使得 $A=\bigcap\limits_{j\in J}B_j$，则称$\mathscr{B}$是拓扑空间$(X,\ \mathscr{T})$的一个**拓扑基**．若 $A\subseteq X$，则称X的子集 $\bar{A}=\bigcap\ \{T\mid A\subseteq T$且$T\in\mathscr{T}\}$ 为A的**闭包**．

利用Ω_0上的适当拓扑可以刻划完全表示Φ的两个子表示的等价性．

定理4 设L是任意格，Ω_0，Φ同定理2．如果$A\subseteq L$，记$T_A=\bigcap\limits_{a\in A}\Phi(a)$（当$A=\varnothing$时约定$T_\phi=\Omega_0$）．则

(1) $\mathscr{T}=\ \{T_A\mid A\subseteq L\}$ 是 Ω_0 上的一个拓扑，并且 $\mathscr{B}=\{\Phi(a)\mid a\in L\}$ 是拓扑空间$(\Omega_0,\ \mathscr{T})$的一个拓扑基；

(2) 若 Ω，Ω' 是 Ω_0 的两个子集，则 Φ 的子表示 Φ_Ω 与 $\Phi_{\Omega'}$ 等价 $\Longleftrightarrow$ 对任意 $a\in L$，$\overline{\Phi_\Omega(a)}=\overline{\Phi_{\Omega'}(a)}$（即$\Phi_\Omega(a)$与$\Phi_{\Omega'}(a)$在拓扑空间$(\Omega_0,\ \mathscr{T})$中的闭包一致）．

证 (1)的验证留给读者，下面证(2)．

设$\overline{\Phi_\Omega(a)}=\overline{\Phi_{\Omega'}(a)}$，$\forall a\in L$．由(1)知

$$\overline{\Phi_\Omega(a)}=\bigcap\ \{\Phi(b)\mid b\in L\text{且}\Phi_\Omega(a)\subseteq\Phi(b)\},$$

$$\overline{\Phi_{\Omega'}(a)}=\bigcap\{\Phi(b)\mid b\in L\text{且}\Phi_{\Omega'}(a)\subseteq\Phi(b)\}.$$

于是有 $\Phi_\Omega(a)\subseteq\Phi(b)\Longleftrightarrow\Phi_{\Omega'}(a)\subseteq\Phi(b)$．

由于$\Phi_\Omega(a)=\Phi(a)\cap\Omega$，$\Phi_\Omega(b)=\Phi(b)\cap\Omega$．因此得

$$\Phi_\Omega(a)\subseteq\Phi_\Omega(b)\Longleftrightarrow\Phi_{\Omega'}(a)\subseteq\Phi_{\Omega'}(b).$$

从而有

$$\Phi_\Omega(a)=\Phi_\Omega(b)\Longleftrightarrow\Phi_{\Omega'}(a)=\Phi_{\Omega'}(b),\quad\forall a,\ b\in L.$$

故Φ_Ω与$\Phi_{\Omega'}$等价．

反之，设Φ_Ω与$\Phi_{\Omega'}$等价．于是对任意a，$b\in L$，

$$\Phi_\Omega(a)=\Phi_\Omega(b)\Longleftrightarrow\Phi_{\Omega'}(a)=\Phi_{\Omega'}(b),$$

利用素对偶理想的定义易证：

$$\Phi_\Omega(a)\subseteq\Phi_\Omega(b)\Longleftrightarrow\Phi_\Omega(a)=\Phi_\Omega(a\wedge b)$$

$$\Longleftrightarrow\Phi_{\Omega'}(a)=\Phi_{\Omega'}(a\wedge b)\Longleftrightarrow\Phi_{\Omega'}(a)\subseteq\Phi_{\Omega'}(b).$$

由此得

$$\Phi_\Omega(a)\subseteq\Phi(b)\Longleftrightarrow\Phi_{\Omega'}(a)\subseteq\Phi(b),\quad\forall a,\ b\in L.$$

故 $\overline{\Phi_\Omega(a)}=\overline{\Phi_{\Omega'}(a)}$，$\forall a\in L$. ▌

练　　习

1. 补证定理1与定理4.

2. 证明：表示的等值和等价是等价关系.

3. 举例说明等价的两个表示未必等值.

4. 设 L 是任意格，Ω_0，Φ 同定理 2，Ω 是 Ω_0 的子集. 令$T(\Omega)=\{\Omega'\mid\Omega'\subseteq\Omega_0$且$\Phi_{\Omega'}$与$\Phi_\Omega$等价$\}$，$\Omega^*=\bigcup\limits_{\Omega'\in T(\Omega)}\Omega'$. 证明$\Omega^*\in T(\Omega)$.

§ 3.7　中心元与积分解

本节讨论格的中心元与积分解. 由于偏序集的积XY是格当且仅当 X，Y 都是格（§ 3.1 定理 1），在格中序同构等价于格同构（§ 3.4 推论 1）. 因此我们宁可在偏序集上作更一般的讨论，所有的概念及结论都可无保留地转移到格上来.

设P是一个偏序集. 若存在偏序集$X_j(j\in J)$，使得

$$P=\prod_{j\in J}X_j,\qquad(*)$$

则称上式是P的一个**积分解**，每一个X_j叫做一个**因子**. 若P

至少有 2 个元素并且 P 不能表成两个或两个以上非平凡）即阶≥2）偏序集的积，则称 P 是**既约偏序集**. 若在积分解(*)中每一个因子X_j都是既约的，则称 (*) 式是P的一个**既约分解**.

例1 在图3.7.1中，P是 6 元格，X，Y 分别是 2 元链与 3 元链. 易见 $P=XY$ 是P的积分解.

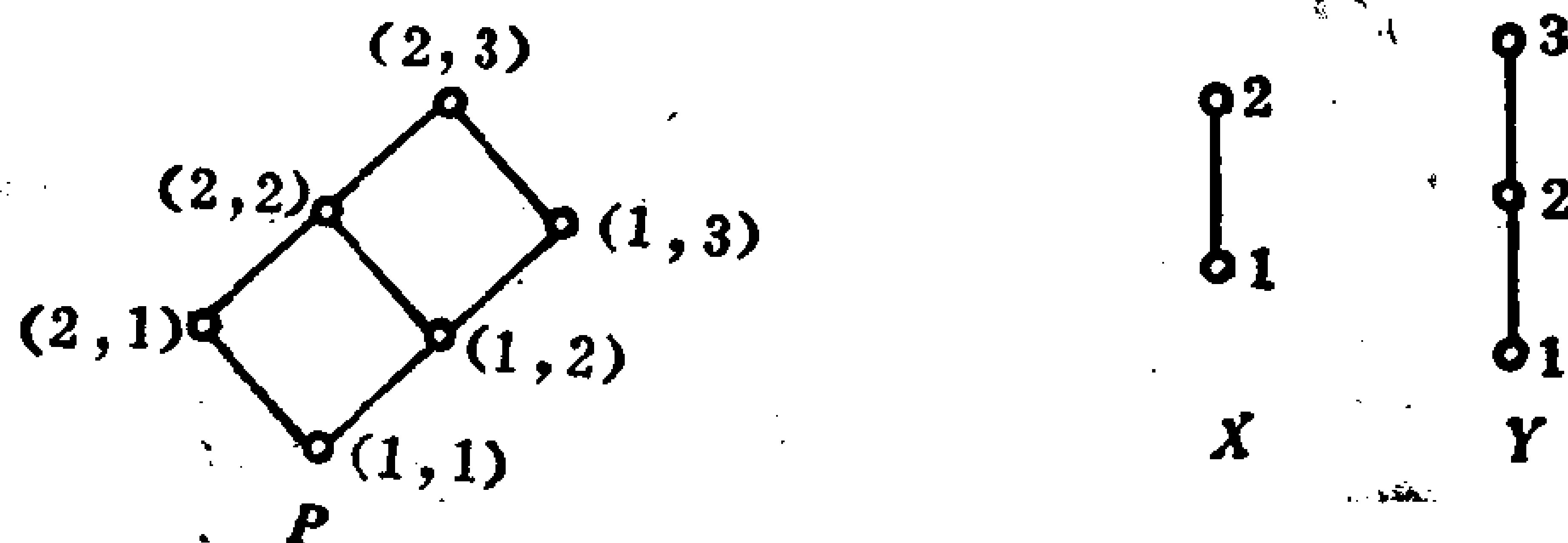


图 3.7.1

例2 任何素数阶的偏序集都是既约的，因此例 1 中的分解式$P=XY$是P的既约分解.

下面我们着重讨论偏序集P的有限积分解

$$P=X_1X_2\cdots X_n=\prod_{i=1}^{n}X_i.$$

显然P有泛界O，I当且仅当每一个因子X_i有泛界O_i，I_i ($i=1, 2, \cdots, n$). 这时有

$$O=(O_1, O_2, \cdots, O_n),\ I=(I_1, I_2, \cdots, I_n).$$

设P是有泛界O，I的偏序集，$e\in P$. 若存在P的某个积分解，使得e有一个分量是相应因子的单位元，其余分量皆为相应因子的零元，则称e是P的一个**中心元**. P的所有中心元组成的集合用$C(P)$表示，称为P的**中心**.

由于偏序集的基数积满足结合律和交换律(§2.5定理

1)，因此对任意偏序集P及$e\in P$，$e\in C(P)$当且仅当P有两个因子的积分解$P=XY$，使得$e=(I_X, O_Y)$，其中I_X是X中的单位元，O_Y是Y中的零元．若φ是P的自同构或自对偶同构，则$\varphi(C(P))=C(P)$，即偏序集的中心在自同构或自对偶同构下是不变的．

定理1 设P是有泛界O，I的偏序集，$e\in C(P)$，则

(1) e在P中有唯一的补元e'，使得$e\wedge e'=O$，$e\vee e'=I$，并且$e'\in C(P)$；

(2) 对任意$a\in P$，$a\wedge e$，$a\vee e$存在；

(3) 若令$E=[O, e]$，$E^*=[e, I]$，则$P=EE^*$（这里等号表示同构）．

证 由于$e\in C(P)$，因此P有积分解$P=XY$，使得$e=(I_X, O_Y)$，其中I_X，O_Y分别是X的单位元及Y的零元．显然$e'=(O_X, I_Y)$是e的唯一补元，并且$e'\in C(P)$，即(1)成立．如果$a\in P$，记$a=(a_X, a_Y)$，$(a_X\in X, a_Y\in Y)$．易见$a\wedge e=(a_X, O_Y)$，$a\vee e=(I_X, a_Y)$，因此(2)成立．若$E=[O,e]$，$E^*=[e, I]$，令φ：$P\to EE^*$，使得$\varphi(a)=(a\wedge e, a\vee e)$，$\forall a\in P$．易证$\varphi$是序同构，故(3)成立．∎

推论1 设P是有泛界O，I的偏序集，e，e'是互补的中心元，则映射ψ_e：$x\mapsto x\wedge e$与映射$\varphi_{e'}$：$y\mapsto y\vee e'$是区间$[O, e]$与$[e', I]$间的互逆同构，从而$P=[O, e][O, e']$．

证 设$P=XY$，$e=(I_X, O_Y)$，$e'=(O_X, I_Y)$．对任意$a\in[O, e]$，显然$a\leqslant e=(I_X, O_Y)$．不妨设$a=(a_X, O_Y)$ $(a_X\in X)$．由此不难证明$(a\vee e')\wedge e=a$，即$\psi_e\varphi_{e'}(a)=a$，故$\psi_e\varphi_{e'}$是区间$[O,e]$的恒等映射．同理证$\varphi_{e'}$，ψ_e是$[e', I]$的恒等映射，因此ψ_e与$\varphi_{e'}$互为逆映射．显然它们是序同态，

从而是序同构．由定理1(3)得$P=[O,\ e][O,\ e']$．▮

推论2 设P是有泛界O，I的偏序集，e，e'与f，f'分别是互补的中心元，则

(1)映射φ：$x\mapsto(x\wedge f,\ x\wedge f')$是$[O,e]$到$[O,\ e\wedge f]$ $[O,\ e\wedge f']$的序同构；

(2)$P=[O,\ e\wedge f]\ [O,\ e\wedge f']\ [O,\ e'\wedge f]\ [O,\ e\wedge f']$；

(3)$e\wedge f$与$e\vee f$都是P的中心元．

证 设$P=XY$，$f=(I_X,\ O_Y)$，$f'=(O_X,\ I_Y)$，$e=(e_X,\ e_Y)$．易证

$$(e\wedge f)\wedge(e\wedge f')=O,\quad(e\wedge f)\vee(e\wedge f')=e,$$

从而$e\wedge f$与$e\wedge f'$是区间$[O,\ e]$的中心元．利用推论1可知φ：$x\mapsto(x\wedge f,\ x\wedge f')$是$[O,\ e]$到$[O,\ e\wedge f][O,\ e\wedge f']$的序同构．因此(1)成立．由(1)及推论1知(2)成立．由(1)和(2)知(3)成立．▮

由上述推论可得

定理2 若P是有泛界O，I的偏序集，则P的中心$C(P)$(作为子偏序集)是一个Boole格，其中任意两个元素e，f在$C(P)$中的上(下)确界就是它们在P中的上(下)确界．

证 由推论2及定理1知$C(P)$是有补格，由中心元之定义易证$C(P)$是分配格，故$C(P)$是Boole格．由定理1知最后的断言也成立．▮

偏序集P的两个中心元e，f叫做**互斥**，如果$e\wedge f=O$．

定理3 设P是有泛界O，I的偏序集，则P有积分解$P=\prod_{i=1}^{n}X_i\Longleftrightarrow P$有两两互斥的中心元$e_1,e_2,\cdots,e_n$，使得$e_1\vee e_2\vee$

$\cdots\vee e_n=I$且$X_i=[O,\ e_i]$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

证 若P有积分解$P=\prod_{i=1}^{n}X_i$,则X_i有泛界O_i,I_i $(i=1,2,\cdots,n)$.令$e_i=(O_1,\ O_2,\ \cdots,\ O_{i-1},\ I_i,\ O_{i+1},\ \cdots,\ O_n)$,则$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n$满足要求. 反之,若$P$有适合上述条件的中心元$e_1,\ e_2,\cdots,e_n$,对$n$使用归纳法. 当$n=1$时,结论显然成立. 假定结论对于$\leqslant n-1$的情形已经成立. 对于$n$的情形,令$e=e_1\vee e_2\vee\cdots\vee e_{n-1}$,$X=[O,\ e]$. 由定理2易知$e\wedge e_n=O$,$e\vee e_n=I$. 因此$e$是$e_n$的补元. 由推论1知$P=XX_n$. 显然$e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{n-1}$是$X=[O,\ e]$中的彼此互斥的中心元,并且满足所述条件. 由归纳假设知$X=X_1X_2\cdots X_{n-1}$. 故

$$P=\prod_{i=1}^{n}X_i. \blacksquare$$

称$P=\prod_{i=1}^{n}X_i$是偏序集P的一个**非平凡积分解**,如果每一个因子X_i都是非平凡的(即至少含有两个元素).

定理4 设P是有泛界O,I的偏序集并且P有两个积分解

$$P=\prod_{i=1}^{n}X_i=\prod_{j=1}^{m}Y_j,$$

则

(1)存在积分解$P=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}Z_{ij}$,使得对每一个$i$及$j$有

$$X_i=\prod_{j=1}^{m}Z_{ij},\qquad Y_j=\prod_{i=1}^{n}Z_{ij};$$

(2)若$P=\prod_{i=1}^{n}X_i$是既约分解,$P=\prod_{j=1}^{m}Y_j$是非平凡

分解，则$m\leqslant n$且存在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个分类N_1，N_2，…，N_m，使得

$$Y_j=\prod_{i\in N_j} X_{ij} \quad (j=1, 2, \cdots, m)$$

(3) 若$P=\prod_{i=1}^{n} X_i$与$P=\prod_{j=1}^{m} Y_j$都是既约分解，则$m=n$，并且适当调整下标后有$X_i=Y_i (i=1, 2, \cdots, n)$.

证 (1)由定理3知P中存在两组互斥的中心元

$$\{e_i \mid i=1, 2, \cdots, n\} \text{ 及 } \{f_j \mid j=1, 2, \cdots, m\}$$

满足 $\bigvee_{i=1}^{n} e_i=\bigvee_{j=1}^{m} f_j=I$, $X_i=[O, e_i]$, $Y_j=[O, f_j]$

$$(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m).$$

令$Z_{ij}=[O, e_i\wedge f_j]$. 由推论2及归纳法不难证明

$$X_i=\prod_{j=1}^{m} Z_{ij},\ Y_j=\prod_{i=1}^{n} Z_{ij}\ (i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m)$$并且 $P=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} Z_{ij}$.

(2) 设X_i是既约的$(i=1, 2, \cdots, n)$，则在(1)的积分解$P=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} Z_{ij}$中，存在$j(i)(1\leqslant j(i)\leqslant m)$使得

$$Z_{ij}=\begin{cases} X_i, & \text{当} j=j(i)\text{时} \\ \{O\}, & \text{当} j\neq j(i)\text{时}, \end{cases}$$

$(i=1, 2, \cdots, n)$，在$Y_j=\prod_{i=1}^{n} Z_{ij}$中去掉平凡因子，即知(2)成立.

由(1)和(2)知(3)成立. ▮

推论3 设P是有泛界O, $I(O\neq I)$的偏序集. 若P中存在一个有限极大链, 则P有唯一的(在同构意义下)有限既约分解.

证 唯一性由定理4直接可得. 下证有限既约分解的存在性. 对P中存在的有限极大链的长l使用归纳法. 当$l=1$时, 显然$P=\{O, I\}$是既约的, 结论成立. 假定当有限极大链的长$\leqslant l-1$时结论已经成立. 设$O=a_0\prec a_1\prec\cdots\prec a_l=I$是$P$中长为$l$的极大链. 若$P$本身是既约的, 则结论自明. 否则, P有非平凡的积分解$P=XY$. 记$a_i=(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, 2, \cdots, l)$, $x_i\in X$, $y_i\in Y$. 易见x_{i+1}至多覆盖x_i, y_{i+1}至多覆盖$y_i(i=0, 1, 2, \cdots, l-1)$. 于是

$$x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_l \quad \text{及} \quad y_0\leqslant y_1\leqslant\cdots\leqslant y_l$$

分别是X和Y中的极大链(去掉重复项)且长皆小于l. 由归纳假设知X与Y都有有限既约分解. 故P也有有限既约分解. ▌

练 习

1. 证明: 任何素数阶的有限偏序集是既约的.

2. 证明: (1)在偏序集P中, $e\in C(P)\Longleftrightarrow$存在积分解$P=XY$, 使$e=(I_X, O_Y)$.

(2)偏序集P的中心$C(P)$在P的自同构或自对偶同构下是不变的.

3. 若L是格(不必有O, I), 证明相应于定理4中的结论也成立.

§3.8 分配元与标准元

本节讨论格中的分配元与标准元. 设a, b, c是格L的

任意三个元素，若由它们生成的L的子格是分配格，则称它们是L的一个**分配三元组**，记作$(a, b, c)D$.

显然$a_1, a_2, a_3 \in L$是分配三元组当且仅当对它们的任意排列$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$有

$$a_{i_1}\wedge(a_{i_2}\vee a_{i_3})=(a_{i_1}\wedge a_{i_2})\vee(a_{i_1}\wedge a_{i_3}),$$

$$a_{i_1}\vee(a_{i_2}\wedge a_{i_3})=(a_{i_1}\vee a_{i_2})\wedge(a_{i_1}\vee a_{i_3}).$$

如果L有泛界O或I，则对任意$x, y\in L$必有$(O, x, y)D$或$(I, x, y)D$.

若$a\in L$且对任意$x, y\in L$都有$(a, x, y)D$，则称a是L的**分配元**(或**中立元**).

因此L的泛界O，I（当存在时）是L的分配元. 在格满同态映射下，分配元的象仍是分配元. 在格的积$\prod_{i=1}^{n} L_i$中，元素$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是分配元当且仅当每一个分量$a_i$是$L_i$的分配元$(i=1, 2, \cdots, n)$.

定理1 设L是任意格，$a\in L$，$A=(a]$，$A_d=[a)$分别是由a生成的主理想和主对偶理想，则下述条件等价：

(1)a是L的分配元；

(2)映射φ_a：$x\mapsto x\wedge a$与ψ_a：$x\mapsto x\vee a$是L的自同态，并且τ_a：$x\mapsto(\varphi_a(x), \psi_a(x))$是$L$到积$AA_d$内的单同态；

(3)L可以同构嵌入到格的积XY中，使得a对应于(I_X, O_Y)，其中I_X，O_Y分别是X的单位元与Y的零元；

(4)对任意$x, y\in L$，满足

$$a\wedge(x\vee y)=(a\wedge x)\vee(a\wedge y),$$

$$a\vee(x\wedge y)=(a\vee x)\wedge(a\vee y),$$

$$x\wedge(y\vee a)=(x\wedge y)\vee(x\wedge a),$$

$$x\vee(y\wedge a)=(x\vee y)\wedge(x\vee a).$$

证 (1)⇒(2). 设a是L的分配元，则对任意x，$y\in L$有$(a, x, y)D$. 因此φ_a：$x\mapsto x\wedge a$及ψ_a：$x\mapsto x\vee a$是L的格自同态. 再由§3.2定理4知τ_a：$x\mapsto(\varphi_a(x), \psi_a(x))$是$L$到积$AA_d$中的单同态.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). 设(3)成立. 将L看成XY的子格. 显然$a=(I_X, O_Y)$是XY中的分配元，因此a也是L中的分配元.

(1)⇒(4). 显然.

(4)⇒(2). 设(4)成立. 易见φ_a，ψ_a是L的自同态. 若$\tau_a(x)=\tau_a(y)$，$(x, y\in L)$，则$x\wedge a=y\wedge a$，$x\vee a=y\vee a$. 于是由(4)中后两式得：

$$\begin{aligned}x=x\wedge(x\vee a)&=x\wedge(y\vee a)=(x\wedge y)\vee(x\wedge a)\\&=(x\wedge y)\vee(y\wedge a)\\&=y\wedge(x\vee a)=y\wedge(y\vee a)=y.\end{aligned}$$

因此τ_a：$x\mapsto(\varphi_a(x), \psi_a(x))$是$L$到积$AA_d$的单同态. ▮

***定理2** 设L是任意格，$D(L)$表示L的所有分配元组成的集合，则

(1)$D(L)$是L的一个分配子格，并且$D(L)$等于L的所有极大分配子格的交；

(2)若$a\in D(L)$在L中有补元，则只有一个，并且a的补元也是分配元；

(3)若L有泛界O，I，则$a\in L$是中心元$\Longleftrightarrow a$是有补的分配元.

证 (1)若a，$b\in D(L)$，由定理1(4)，对于任意$x, y\in L$，有

$$(a\wedge b)\wedge(x\vee y)=a\wedge(b\wedge(x\vee y))$$
$$=a\wedge((b\wedge x)\vee(b\wedge y))=(a\wedge(b\wedge x))\vee(a\wedge(b\wedge y))$$
$$=((a\wedge b)\wedge x)\vee((a\wedge b)\wedge y)。$$

同理有

$$(a\wedge b)\vee(x\wedge y)=((a\wedge b)\vee x)\wedge((a\wedge b)\vee y),$$
$$x\wedge(y\vee(a\wedge b))=(x\wedge y)\vee(x\wedge(a\wedge b)),$$
$$x\vee(y\wedge(a\wedge b))=(x\vee y)\wedge(x\vee(a\wedge b)).$$

因此$a\wedge b\in D(L)$。对偶地可证$a\vee b\in D(L)$，故$D(L)$是L的子格．显然$D(L)$是分配格。令D'表示L的所有极大分配子格的交。对任意$a\in L$，若$a\notin D(L)$，则存在x，$y\in L$，使$\{a, x, y\}$不是分配三元组。由此知L中任何包含x，y的分配子格不会含a。显然由x，y生成的L的子格(x, y)是一个分配子格。利用Zorn引理知存在L的一个极大分配子格A使得x，$y\in A$，而$a\notin A$，于是$a\notin D'$．由此知$D'\subseteq D(L)$．反之，若$a\in D(L)$，T是L的任意一个极大分配子格．由定理1(4)易证由$T\cup\{a\}$生成的L的子格是分配格．由T的极大性知$T=(T\cup\{a\})$，从而$a\in T$．于是$D(L)\subseteq D'$，故$D(L)=D'$．

(2)如果$a\in D(L)$在L中有一补元a'，由定理1(3)知$a'\in D(L)$．由(1)及§3.2定理4知a的补元只有一个．

(3)设L有泛界O，I．由定理1(3)知L的中心元一定是有补的分配元．反之，若a是L的分配元且有补元a'．对任意$b\in(a]=A$，$c\in[a)=A_d$，令$x=b\vee(c\wedge a')$．由定理1(4)可得$x\wedge a=b, x\vee a=c$．由定理1(2)知$\tau_a: x\mapsto(x\wedge a, x\vee a)$是$L$到$AA_d$的格同构．从而$a$是$L$的中心元．▮

若s是格L的一个元素，且满足

(1)映射ψ_s: $x\mapsto x\vee s$是L的格自同态;

(2)$x\vee s=y\vee s$, $x\wedge s=y\wedge s$ (x, $y\in L$)蕴涵$x=y$,

则称s是L的一个**标准元**.

对偶地可定义L的**对偶标准元**.

定理3 设L是任意格, $a\in L$, 则下述条件等价:

(1)a是标准元且是对偶标准元;

(2)a是分配元。

证明留作练习. ▌

推论1 在任意格中, 标准元(对偶标准元)若有补元,则只有一个.

证 由定义显然. ▌

标准元与标准理想(见§3.5)有密切联系.

定理4 在任意格L中, 元素a是标准元$\Longleftrightarrow$由a生成的主理想$(a]$是标准理想.

证 设$J=(a]$是L的标准理想, 则二元关系τ_J:

$x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ \tau_J)\Longleftrightarrow$存在$d\leqslant a$使$(x\wedge y)\vee d=x\vee y$

是L的格同余关系. 任取x, $y\in L$, 显然

$$x\equiv x\vee a,\quad y\equiv y\vee a\quad (\mathrm{mod}\ \tau_J),$$

于是 $$x\wedge y\equiv (x\vee a)\wedge(y\vee a)\quad (\mathrm{mod}\ \tau_J),$$

即存在$d\leqslant a$使得

$$((x\wedge y)\wedge(x\vee a)\wedge(y\vee a))\vee d$$
$$=(x\wedge y)\vee((x\vee a)\wedge(y\vee a)).$$

由此得 $$(x\wedge y)\vee d=(x\vee a)\wedge(y\vee a).$$

两边与a作并即

$$(x\wedge y)\vee a=(x\vee a)\wedge(y\vee a),$$

因此ψ_a: $x\mapsto x\vee a$是交同态. 显然ψ_a又是并同态, 故ψ_a是L

的格自同态。若

$$x\wedge a=y\wedge a,\qquad x\vee a=y\vee a,$$

则由$x\equiv x\vee a(\mathrm{mod}\ \tau_J)$得

$$x\wedge y\equiv(x\vee a)\wedge y=(y\vee a)\wedge y=y(\mathrm{mod}\ \tau_J).$$

于是存在$c\leqslant a$使得

$$y=(x\wedge y)\vee y=((x\wedge y)\wedge y)\vee c=(x\wedge y)\vee c,$$

于是$c\leqslant y\wedge a=x\wedge a\leqslant x\wedge y$，从而$y=x\wedge y$. 同理可证$x=x\wedge y$，因此$x=y$。故$a$是$L$的标准元.

反之，设a是L的标准元，则ψ_a：$x\mapsto x\vee a$是L的格自同态. 在L中如下定义二元关系θ：

$$x\equiv y(\mathrm{mod}\ \theta)\Longleftrightarrow x\vee a=y\vee a,$$

则由§3.5定理3知θ是L的格同余关系. 为证$J=(a]$是标准理想,只须证明$\tau_J=\theta$. 设$x\equiv y(\mathrm{mod}\ \tau_J)$，即存在$d\leqslant a$使$(x\wedge y)\vee d=x\vee y$.两边与$a$作并得$(x\wedge y)\vee a=(x\vee y)\vee a$. 因此$x\wedge y\equiv x\vee y(\mathrm{mod}\ \theta)$. 由§3.5推论1知$x\equiv y(\mathrm{mod}\ \theta)$. 反之，设$x\equiv y(\mathrm{mod}\ \theta)$,即$x\vee a=y\vee a$. 令$d=(x\vee y)\wedge a$，则$d\leqslant a$且$d\leqslant x\vee y$. 由于$\psi_a$是格同态，易证

$$((x\wedge y)\vee d)\vee a=(x\vee y)\vee a,$$

并且 $$((x\wedge y)\vee d)\wedge a=d=(x\vee y)\wedge a.$$

因为a是标准元，故必有$(x\wedge y)\vee d=x\vee y$，其中$d\leqslant a$. 从而$x\equiv y(\mathrm{mod}\ \tau_J)$，即$\tau_J=\theta$是$L$的格同余关系.因此$J=(a]$是$L$的标准理想. ▌

同分配元一样，格中全体标准元也构成一个分配子格.

定理5 设L是任意格，$S(L)$表示L的全体标准元组成的集合，则$S(L)$是L的一个分配子格.

证 设a，$b\in S(L)$，则ψ_a：$x\mapsto x\vee a$，ψ_b：$y\mapsto y\vee b$是

了的格同态．任取x，$y\in L$，令

$$c=(x\wedge y)\vee(a\wedge b),$$
$$d=(x\vee(a\wedge b))\wedge(y\vee(a\wedge b)).$$

易证 $c\vee a=d\vee a$．再令$c^*=c\wedge a$，$d^*=d\wedge a$，则有

$$c^*\wedge b=d^*\wedge b,\qquad c^*\vee b=d^*\vee b.$$

由于b是标准元，因此$c^*=d^*$．因a是标准元，于是$c=d$．从而$\psi_{a\wedge b}$：$x\mapsto x\vee(a\wedge b)$是交同态．显然$\psi_{a\wedge b}$又是并同态，因此是格同态．若有

$$x\wedge(a\wedge b)=y\wedge(a\wedge b)\text{ 且 }x\vee(a\wedge b)=y\vee(a\wedge b),$$

于是有$x\vee a=y\vee a$，$x\vee b=y\vee b$．另一方面显然有

$$(x\wedge a)\wedge b=(y\wedge a)\wedge b,$$
$$(x\wedge a)\vee b=(x\vee b)\wedge(a\vee b)=(y\wedge a)\vee b.$$

由于b是标准元，因此$x\wedge a=y\wedge a$．同理由a是标准元得$x=y$，故$a\wedge b$是标准元．同理证$a\vee b$也是标准元．由此知$S(L)$是L的子格．由§3.2定理2及标准元之定义知$S(L)$是分配格．▌

练　　习

1．证明：(1)格L的泛界O，I一定是分配元；

(2) 在格满同态对应下，分配元的象仍是分配元；

(3) 在格的积$\prod_{i=1}^{n}L_i$中，元素$a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$是分配元$\Longleftrightarrow a_i$是$L_i$的分配元$(i=1, 2, \cdots, n)$．

2．举例说明在格中，一个标准元未必是分配元，一个分配元未必是中心元．

3．若a，b，c是格L中任意元素，证明：

$(a\wedge b,\ b\wedge c,\ c\wedge a)D,\ (a\vee b,\ b\vee c,\ c\vee a)D.$

§3.9 格多项式

所谓一个**格多项式**是指用$\wedge$，$\vee$两种符号把有限个字母(变元)连接起来的一个式子．确切的定义可递归地给出．

设X是给定的非空集合．X上的**秩**为r(r为自然数)的**格多项式**定义如下：

(1)X中每一个元素x称为秩为1的格多项式；

(2)若p，q分别是秩为r及s的格多项式，则表达式$p\vee q$及$p\wedge q$叫做秩为$r+s$的格多项式．

显然，若p是X上的格多项式，则一定存在X的有限子集Y，使得p是Y上的格多项式．若$X=\{x_1,\ x_2,\cdots,x_n\}$是有限集，则称$X$上的格多项式$f$是以$x_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$为未定元的$n$**元格多项式**，通常记作$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$．

令$W(X)$表示所有X上的格多项式组成的集合．对任意p，$q\in W(X)$，显然$p\wedge q$，$p\vee q\in W(X)$．因此$W(X)$可看作带有$\wedge$，$\vee$两种运算的代数系，称之为集合X上的**字代数**．

在$W(X)$中，格多项式f完全由它的表达式中所出现的X的元素及其用$\wedge$，$\vee$符号连接的次序所确定．例如形为$x\wedge x$，x，$(x\vee y)\wedge x$，$x\wedge(x\vee y)$的表达式皆应视为不同的格多项式．

字代数$W(X)$具有所谓的泛性质．

定理1 设$W(X)$是集合X上的字代数，L是任意格，若φ：$X\to L$是任意映射，τ：$X\to W(X)$是包含映射，则存在

唯一的映射φ^*：$W(X)\to L$，使得

(1) $\varphi^*\tau=\varphi$(即使右图可交换)；

(2) 对任意p，$q\in W(X)$，有

$\varphi^*(p\wedge q)=\varphi^*(p)\wedge\varphi^*(q)$，

$\varphi^*(p\vee q)=\varphi^*(p)\vee\varphi^*(q)$.

(即φ^*是代数同态).

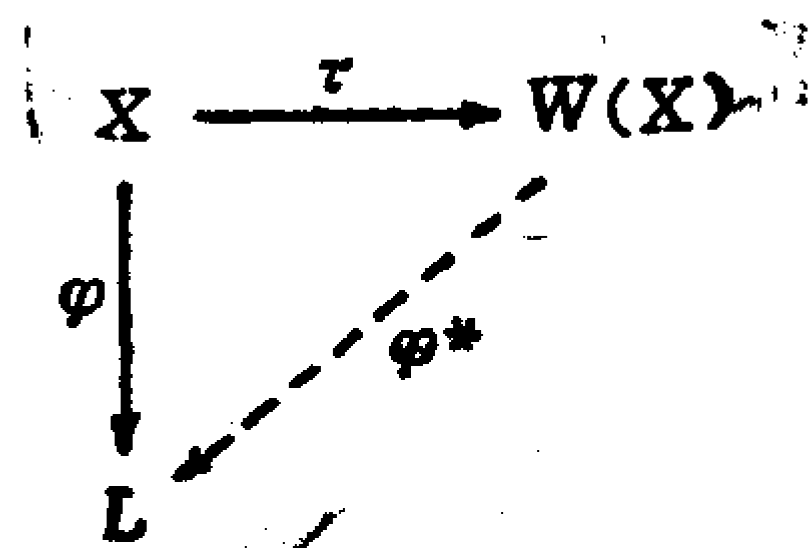


图 3.9.1

证 递归地定义φ^*. 对于秩为1的格多项式x，规定$\varphi^*(x)=\varphi(x)$. 假定秩分别为r，s的格多项式p，q均已定义$\varphi^*(p)$及$\varphi^*(q)$，则对秩为$r+s$的格多项式$p\wedge q$，$p\vee q$规定：

$$\varphi^*(p\wedge q)=\varphi^*(p)\wedge\varphi^*(q),\varphi^*(p\vee q)=\varphi^*(p)\vee\varphi^*(q).$$

易证φ^*满足要求. ∎

设p，$q\in W(X)$. 在定理1中若对任意的映射φ：$X\to L$，均有$\varphi^*(p)=\varphi^*(q)$，则称格多项式$p$与$q$**在$L$中恒等**，或称格$L$适合格等式$p=q$.

上述概念也可不使用泛性质而直接给出. 设$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是有限集合，$p$是$X$上的格多项式. L是任意格，$L^n=L\times L\times\cdots\times L$是$n$个$L$的笛卡尔积. 对于每一个$n$元组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\in L^n$，递归地定义格$L$中的元素$p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$：

当p的秩为1时，设$p=x_k(1\leqslant k\leqslant n)$，则规定$p(a_1, a_2, \cdots, a_n)=a_k$. 当$p$的秩为$r$时$(r\geqslant 2)$，并且假定对于秩小于$r$的格多项式相应的元素已定义，设$p=p_1\wedge p_2$或$p=p_1\vee p_2$，其中$p_1$，$p_2$的秩皆小于$r$，则规定

$$p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
$$=p_1(a_1, a_2, \cdots, a_n)\wedge p_2(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

或

$$p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
$$=p_1(a_1, a_2, \cdots, a_n)\vee p_2(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

若p，$q\in W(X)$且对任意$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\in L^n$，均有$p(a_1, a_2, \cdots, a_n)=q(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则称$p$，$q$在$L$中是**恒等的**，或称格$L$满足格等式$p=q$.

若对任意格L，格多项式p，q均在L中是恒等的，则称p与q是**恒等格多项式**，或称等式$p=q$是**格恒等式**.

例1 令$X=\{x_1, x_2, x_3\}$，则以下诸式是格恒等式：

(1) $x_1\wedge x_1=x_1$，$x_1\vee x_1=x_1$；

(2) $x_1\wedge x_2=x_2\wedge x_1$，$x_1\vee x_2=x_2\vee x_1$；

(3) $(x_1\wedge x_2)\wedge x_3=x_1\wedge(x_2\wedge x_3)$；

$(x_1\vee x_2)\vee x_3=x_1\vee(x_2\vee x_3)$；

(4) $x_1\wedge(x_1\vee x_2)=x_1$，$x_1\vee(x_1\wedge x_2)=x_1$.

例2 分配格L满足以下格等式：

(1) $x_1\wedge(x_2\vee x_3)=(x_1\wedge x_2)\vee(x_1\wedge x_3)$；

(2) $x_1\vee(x_2\wedge x_3)=(x_1\vee x_2)\wedge(x_1\vee x_3)$；

模格L满足以下格等式：

(3) $(x_1\vee x_2)\wedge((x_1\wedge x_2)\vee x_3)$

$=(x_1\wedge x_2)\vee((x_1\vee x_2)\wedge x_3)$（验证留给读者）.

定理2 设L是任意格，p，q是集合X上的格多项式.

(1) 若L满足格等式$p=q$，则L的子格及L的同态象亦然；

(2) 若$L=\prod_{i=1}^{n}X_i$，则L满足格等式$p=q\Longleftrightarrow$每一个

因于X_i满足该等式$(i=1, 2, \cdots, n)$;

(3)若L满足格等式$p=q$，则对任意$r\in W(X)$，L亦满足格等式$r\wedge p=r\wedge q$及$r\vee p=r\vee q$.

证明显然. ▌

定理3 设X是任意非空集合，在字代数$W(X)$中，

(1)格多项式的"恒等"关系是等价关系;

(2)在"恒等"意义下，$W(X)$中的$\wedge$，$\vee$运算满足幂等律、交换律、结合律和吸收律. 即对任意p，q，$r\in W(X)$，下述各式是格恒等式:

LI_1 $p\wedge p=p$，$p\vee p=p$;

LI_2 $p\wedge q=q\wedge p$，$p\vee q=q\vee p$;

LI_3 $(p\wedge q)\wedge r=p\wedge(q\wedge r)$,

$(p\vee q)\vee r=p\vee(q\vee r)$;

LI_4 $p\wedge(p\vee q)=p$，$p\vee(p\wedge q)=p$.

证明留作练习. ▌

设p_1，p_2，$\cdots$，$p_n\in W(X)$，用$\wedge$符号把这些p_i按自然排列连接起来并且依次加上括号就得到一个新的格多项式，记为$\bigwedge\limits_{i=1}^{n}p_i$. 即

$$\bigwedge_{i=1}^{n}p_i=(\cdots((p_1\wedge p_2)\wedge p_3)\wedge\cdots)\wedge p_n.$$

由定理3可知不论诸p_i的排列顺序及加括号的方法如何，最后得到的格多项式均与$\bigwedge\limits_{i=1}^{n}p_i$恒等(严格的证明需使用归纳法). 类似地,

$$\bigvee_{i=1}^{n}p_i=(\cdots((p_1\vee p_2)\vee p_3)\vee\cdots)\vee p_n$$

有同样的性质.

有时也记

$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n, \bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n.$$

设$p \in W(X)$是秩大于1的格多项式. 若在p的表达式中只出现$\wedge$符号(或只出现$\vee$符号), 则称p是一个**$\wedge$-多项式**(**或$\vee$-多项式**). 秩为1的格多项式被看成既是$\wedge$-多项式, 又是$\vee$-多项式. 由上面的说明及定理3可知, 若$p \in W(X)$是一个$\wedge$-多项式(或$\vee$-多项式), 则存在有限个相异元素$x_1, x_2, \cdots, x_r \in X$, 使得$p$恒等于$\bigwedge\limits_{i=1}^{r} x_i$ (或$\bigvee\limits_{i=1}^{r} x_i$).

定理4 设L是分配格, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 则

(1) L满足以下格等式:

DI_1 $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

DI_2 $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,

$$(\forall p, q, r \in W(X)).$$

(2) 任意格多项式$p(x_1, \cdots, x_n)$在L中恒等于一些$\wedge$-多项式之并(或$\vee$-多项式之交). 即L适合格等式

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \bigvee_{t \in T} (\bigwedge_{i \in A_t} x_i)$$

$$(\text{或} p(x_1, \cdots, x_n) = \bigwedge_{t \in T} (\bigvee_{i \in A_t} x_i)).$$

其中$A_t (t \in T)$是$\{1, 2, \cdots, n\}$的子集.

证 (1) 显然. 下证(2). 对p的秩r用归纳法. 当$r = 1$时, 结论显然成立. 设$r > 1$, 并且假定对于秩小于r的格多项式结论成立. 若$p = p_1 \vee p_2$, 其中p_1, p_2的秩皆小于r. 由归纳假设知

$$p_1=\bigvee_{t\in T_1}(\bigwedge_{i\in A_t}x_i) \text{ 及 } p_2=\bigvee_{t\in T_2}(\bigwedge_{i\in A_t}x_i)$$

在L中是恒等的，由(1)及定理2，定理3知

$$p=(\bigvee_{t\in T_1}(\bigwedge_{i\in A_t}x_i))\vee(\bigvee_{t\in T_2}(\bigwedge_{i\in A_t}x_i))=\bigvee_{t\in T_1\cup T_2}(\bigwedge_{i\in A_t}x_i)$$

在L中恒等．若$p=p_1\wedge p_2$，同理可证

$$p=(\bigvee_{t\in T_1}(\bigwedge_{i\in A_t}x_i))\wedge(\bigvee_{r\in T_2}(\bigwedge_{j\in A_r}x_j))=\bigvee_{(t,r)\in T_1\times T_2}(\bigwedge_{i\in A_t\cup A_r}x_i)$$

在L中恒等．

类似地可证对偶的结论．▌

定理5 设L是任意格，a_i，$b_i\in L(i=1,2,\cdots,n)$．若$a_i\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,n)$，则对任意$n$元格多项式$p(x_1,\cdots,x_n)$，都有

$$p(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant p(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

证明留作练习．▌

更一般地，在偏序集中有所谓的

定理6（极小极大原则） 设$(P,\leqslant)$是任意偏序集，$\{a_{ij}\mid a_{ij}\in P,\ j\in T_i\}$，$(i\in I)$是$P$的子集族($I$及$T_i$是下标集)，令$S=\prod_{i\in I}T_i$是诸$T_i$的笛卡尔积，则有

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in T_i}a_{ij})\geqslant\bigvee_{f\in S}(\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}),$$

(假定上式中出现的交和并(即下确界及上确界)在P中均存在)．

证 对任意$i_0\in I$及$f\in S$，显然有

$$\bigvee_{j\in T_{i_0}}a_{i_0j}\geqslant a_{i_0,f(i_0)}\geqslant\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}.$$

于是 $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in T_i}a_{ij})\geqslant\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}$，$(\forall f\in S)$．

故 $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in T_i}a_{ij})\geqslant\bigvee_{f\in S}(\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)})$. ▮

练　　习

1. 补证定理3及定理5。

2. 验证例1、例2的结论。

第四章 完 备 格

本章进一步研究完备格．首先给出完备格的一些等价条件(§4.1，§4.2)，进而讨论完备格的两种具体构造方法，即闭包运算(§4.3)和Galois联络(§4.4)．最后发展了 Dedekind 的实数分割理论，研究了如何把一个偏序集（或格）嵌入到完备格中(§4.5)．

§4.1 完备格与条件备格

我们在§3.2中定义了完备格(简称备格)及其闭子格，并且已经知道备格的对偶及闭子格也是备格，有限格是备格，备格的积是备格(§3.2定理1)．由定义可知，一个偏序集 P 是备格当且仅当P的任意非空子集S有上确界$\bigvee S$及下确界$\bigwedge S$．

注意到在偏序集P中，空子集$\varnothing$的上确界(下确界）等于P的下确界(上确界)．由§2.3推论 2 可得

定理1 设P是非空偏序集，则下述条件等价：

(1) P是完备格；

(2) P的任意子集(包括$\varnothing$)有下确界；

(3) P的任意子集(包括$\varnothing$)有上确界；

(4) P有泛界I，且P的任意非空子集有下确界；

(5) P有泛界O，且P的任意非空子集有上确界．

证明留给读者. ▌

推论1 对任意格$L(\neq\varnothing)$，下述条件等价：

(1) L是完备格；

(2) L的任意线性序子集(包括$\varnothing$)有下确界；

(3) L的任意线性序子集(包括$\varnothing$)有上确界；

(4) L有泛界I，且L的任意非空线性序子集有下确界；

(5) L有泛界O，且L的任意非空线性序子集有上确界.

证 (1)$\Longrightarrow$(2)显然.

(2)$\Longrightarrow$(1). 设(2)成立，则L有单位元$I(=\bigwedge\varnothing)$. 任取$A\subseteq L$，显然A的上界集$M_aA\neq\varnothing$. 由Hausdorff定理(§2.7)知M_aA中存在极大链C. C显然是L的线性序子集，因而在L内有下确界$b=\bigwedge C$. 易证$b\in M_aA$，因此b是M_aA的极小元. 由§3.1练习2及练习3知M_aA是L的子格. 并且b是M_aA的最小元，故$b=\bigvee A$. 由定理1(3)知L是完备格.

同理证(1)与(3)，(4)，(5)等价. ▌

推论2 设L是任意格.

(1)若L有单位元I(零元O)且满足极小条件(极大条件)，则L是完备格；

(2)若L是有限长的格，则L是完备格；

(3)若L是完备格，S是L的非空子集，且对任意$X\subseteq S$，X在L内的下确界(上确界)属于S，则S是完备格.

证 只证(3)，其余留作练习.

由假设知$I=\bigwedge\varnothing\in S$，因此$I$是$S$(作为子偏序集)的单位元. 若$X\subseteq S$，且$X\neq\varnothing$，则$X$在$L$内的下确界$b=\bigwedge X\in S$，

并且b也是X在S内的下确界. 由定理1(4)知S是完备格. ▌

注 推论2(3)中的S未必是L的子格. 例如图4.1.1所表示的6元格L是完备格. 子集$S=\{O, a, b, c, I\}$满足上述推论中(3)的条件, 因而是完备格. 但S不是L的子格.

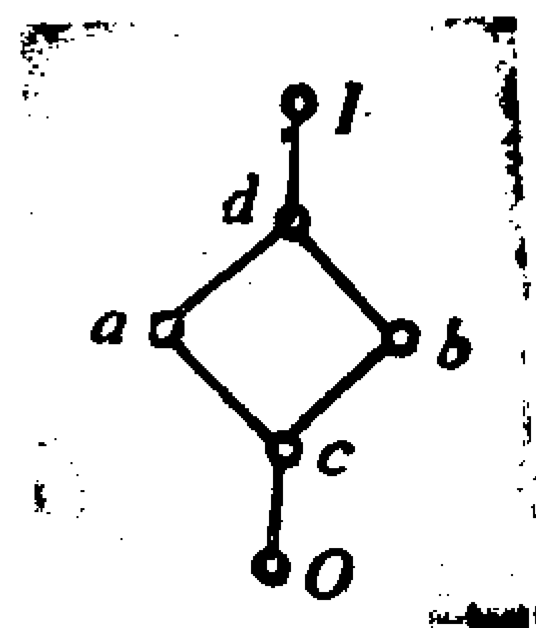


图 4.1.1

由§2.3定理4知完备格中适合一般结合律:

$$\bigwedge_{j\in J}(\bigwedge X_j)=\bigwedge(\bigcup_{j\in J}X_j),\quad \bigvee_{j\in J}(\bigvee X_j)=\bigvee(\bigcup_{j\in J}X_j).$$

事实上, 一般结合律与吸收律完全刻划了完备格.

设A是任意集合. 若存在一个法则, 使得对A的任意非空子集X, 都存在唯一确定的元素$b\in A$与之对应 (记作$b=\bigwedge X$或$b=\bigvee X$), 则称这种对应法则为A的**广义代数运算**. 显然A的任何广义代数运算均可导出A的一个通常的二元代数运算.

定理2 设集合L中定义了$\wedge$, $\vee$两种广义代数运算, 并且满足一般结合律和吸收律, 即对于任意$X_j\subseteq L$, $X_j\neq\varnothing$ $(j\in J)$及x, $y\in L$, 有

(1) $\bigwedge_{j\in J}(\bigwedge X_j)=\bigwedge(\bigcup_{j\in J}X_j)$,

$\bigvee_{j\in J}(\bigvee X_j)=\bigvee(\bigcup_{j\in J}X_j)$;

(2) $x\wedge(x\vee y)=x=x\vee(x\wedge y)$;

则L成为一个完备格.

证 $\wedge$, $\vee$作为L的二元运算显然满足幂等律、交换律. 由(1)、(2)知$\wedge$、$\vee$又满足结合律与吸收律. 由§3.1定理4知$(L, \wedge, \vee)$成为一个格, 其中的序关系为:

$$x\leqslant y\Longleftrightarrow x\wedge y=x(\text{或}x\vee y=y).$$

设$S\subseteq L$，$S\neq\varnothing$，则对任意$x\in S$有

$$(\wedge S)\wedge x=\wedge(S\cup\{x\})=\wedge S,$$

因此$\wedge S\leqslant x(\forall x\in S)$. 若$t\in L$且$t\leqslant x(\forall x\in S)$，则$t\wedge x=t(\forall x\in S)$. 于是

$$t\wedge(\wedge S)=\wedge(\{t\}\cup S)=\wedge(t\wedge x\mid x\in S)=t,$$

因此$t\leqslant\wedge S$，即$\wedge S=\inf S$. 同理证$\vee S=\sup S$，故L是完备格. ▌

设S是偏序集P的一个子集. 若S在P内至少有一个上界和一个下界(即$M_aS\neq\varnothing$，$M_iS\neq\varnothing$)，则称S是P的一个**有界子集**.

格L叫做一个**条件备格**，如果它的每一个非空有界子集都有上确界和下确界.

显然备格一定是条件备格，反之不真. 例如实数集R关于自然序(数的大小关系)是条件备格，但不是完备格.

定理3 对任意格$L(\neq\varnothing)$，下述条件等价：

(1)L是条件备格；

(2)L的任意非空有界子集有下确界；

(3)L的任意非空有界子集有上确界；

(4)L的非空有界线性序子集有下确界；

(5)L的非空有界线性序子集有上确界.

证 (1)$\Longrightarrow$(2). 显然.

(2)$\Longrightarrow$(1). 设(2)成立，$S\neq\varnothing$是L的有界子集. 于是S的上界集$M_aS\neq\varnothing$. 任意取定$a\in M_aS$，令$A=\{a\wedge x\mid x\in M_aS\}$. 易见$A$是$L$的非空有界子集(显然$a\in A$，且$a\in M_aA$，$S\subseteq M_iA$). 因此$A$在$L$内有下确界$b=\wedge A$. 由§2.3推

论1知b是S的上确界．由此证明了(2)蕴涵(3)，从而(1)成立。同理证(1)与(3)等价．

其余仿推论1证明．▌

类似上述定理的证明可得

推论3 在条件备格中，任意非空有下界(上界)的子集一定有下确界(上确界)．

证明留给读者．▌

条件备格与备格的差别就在于它们是否有泛界．

定理4 设L是任意条件备格．若在L中添加泛界O,I以后得到的格记为L'，则L'是完备格．

证 任取$X' \subseteq L'$．若$O \in X'$，则X'在L'内有下确界O．若$O \overline{\in} X'$，令$X = X' - \{I\}$，则$X \subseteq L$.当$X = \varnothing$时，必有$X' = \varnothing$或$X' = \{I\}$．这时X'在L'内有下确界I．当$X \neq \varnothing$时，若X在L内有下确界b，则b也是X'在L'内的下确界；若X在L内没有下确界，则O就是X'在L'内的下确界．不论怎样，X'在L'内总存在下确界．同理证X'在L'内有上确界．故L'是完备格．▌

推论4 设L是有泛界O，I的格，则L是完备格$\Longleftrightarrow L$是条件备格．

证明显然．▌

一个完备格去掉泛界O，I以后，剩下的子集(作为子偏序集)未必是条件备格，甚至未必是格(读者举例)．

练　习

1. 设X是完备格，Y是任意偏序集．证明：X^Y(基数幂)是完备格．

2. 补证定理1和推论3.

3. 设L是交半格(并半格)，证明：L是完备格$\Longleftrightarrow L$的任意线性序子集(包括$\varnothing$)在L中有下确界(上确界).

4. 偏序集$(P, \leqslant)$叫做条件备的，如果P的任意非空有界子集有上确界和下确界. 证明：在条件备的偏序集P上添加泛界O，I后就得到一个完备格.

§4.2 不动点定理

完备格有一个重要的特征性质，即在任何保序自同态对应下总有不动点. 为证明这一结论，首先需要改进§4.1推论1的结果.

定理1 设L是任意格，则下述条件等价：

(1) L是完备格；

(2) L中任意满足极小条件的线性序子集(包括$\varnothing$)有上确界；

(3) L中任意满足极大条件的线性序子集(包括$\varnothing$)有下确界.

证 为叙述方便起见，称满足极小条件(极大条件)的线性序子集为D.C.C链(A.C.C链).

(1)$\Longrightarrow$(2). 显然.

(2)$\Longrightarrow$(1). 设(2)成立，即L中每一个D.C.C链都有上确界. 任取$S\subseteq L$，记$S_* = M_lS$是S的下界集，并且令

$$P = \{C \mid C\text{是D.C.C链，并且}C\subseteq S_*\},$$

显然$\varnothing\in P$，因此$P\neq\varnothing$. 在P中如下定义一个二元关系$\leqslant'$：

$$C\leqslant' D\Longleftrightarrow C=D\text{或}C\text{是}D\text{的一个开截段(见§2.6)}①$$

① 即存在$d\in D$，使得$C=\{x \mid x\in D\text{且}x<d\}$.

易证$(P, \leqslant')$是偏序集. 应用Zorn引理可证P中有极大元M. 由(2)知M有上确界$a=\bigvee M\in L$. 由于$M\subseteq S_*$, 易见$a\in S_*$. 若$b\in S_*$, 则必有$b\leqslant a$(否则, 由$b\nleqslant a$导出$a<a\vee b\in S_*$, 这样$M\cup\{a\vee b\}$将是包含在S_*中的D.C.C链, 与M的极大性矛盾). 因此a是S_*中的最小元, 即$a=\bigwedge S$. 从而L的任意子集都有下确界, 故L是完备格(§4.1定理1). 同理证(1)与(3)等价. ▌

下面证明所谓的不动点定理.

定理2 (不动点定理) 格L是完备格当且仅当L到自身的任意保序自同态f至少有一个**不动点**(即存在$a\in L$, 使得$f(a)=a$).

证 设L是完备格, f: $L\to L$是序同态. 令

$$S=\{x\mid x\in L, \text{且} x\leqslant f(x)\},$$

显然$S\neq\varnothing$(因为$O\in S$). 记$a=\bigvee S$, 则对任意$x\in S$, $x\leqslant a$, 从而$x\leqslant f(x)\leqslant f(a)$. 于是$f(a)$是$S$的一个上界, 因此$a\leqslant f(a)$. 由此得$f(a)\leqslant f(f(a))$, 即$f(a)\in S$. 于是$f(a)\leqslant a\leqslant f(a)$, 故$a=f(a)$.

若L不是完备格, 由定理1知L中存在一个A.C.C链C没有下确界. 记C_*是C的下界集, 类似定理1可证C_*中存在一个极大的D.C.C链D, 使得下述断言成立:

(1)L中不存在元素x, 使得对任意$d\in D$, 及$c\in C$, $d\leqslant x\leqslant c$.

否则, 若L中有这样的x, 则x是D的上界又是C的下界. 由于C无下确界(即C_*无最大元), 因此存在$y\in C_*$使得$y\nleqslant x$, 从而$x<y\vee x\in C_*$, 这样$D\cup\{y\vee x\}$将是C_*中的D.C.C链, 此与D的极大性矛盾.

(2) 存在序同态f：$L\to L$，而f没有不动点.

事实上，对任意的$x\in L$，令

$$C(x)=\{c\mid c\in C,\ 且x\nleqslant c\},$$
$$D(x)=\{d\mid d\in D,\ 且d\nleqslant x\}.$$

则由(1)知$C(x)$与$D(x)$至少有一个非空. 由于C是A.C.C链，D是D.C.C链，因此当$C(x)\neq\varnothing$时$C(x)$有最大元；当$D(x)\neq\varnothing$时，$D(x)$有最小元. 如下定义f：$L\to L$，对任意$x\in L$，使

$$f(x)=\begin{cases}C(x)的最大元，若C(x)\neq\varnothing\\ D(x)的最小元，若C(x)=\varnothing\end{cases}$$

显然f有意义，并且$f(x)\neq x\ (\forall x\in L)$. 下面证明$f$是序同态. 设$x\leqslant y$，$x$，$y\in L$. 若$C(x)=\varnothing$，$C(y)\neq\varnothing$，则$f(x)\in D$，$f(y)\in C$. 显然$f(x)\leqslant f(y)$. 若$C(x)=\varnothing$，$C(y)=\varnothing$，由$x\leqslant y$可知$D(y)\subseteq D(x)$. 于是也有$f(x)\leqslant f(y)$. 最后设$C(x)\neq\varnothing$，由$x\leqslant y$知$C(x)\subseteq C(y)$，因此$C(y)\neq\varnothing$，亦有$f(x)\leqslant f(y)$. 故$f$是$L$的保序自同态，但$f$没有不动点.

综合上述可知，若L的每一个保序自同态都有不动点，则L一定是完备格. ▌

注 存在不是格的偏序集，其每一个保序自同态都有不动点. 但是如何刻划这类偏序集(甚至是这样的有限偏序集)，目前仍是一个悬而未知的问题.

练　　习

1. 补充定理1、定理2证明中的细节.

2. 设L是完备格，f：$L\to L$是L的保序自同态. 令$F=\{a\mid a\in L,\ 且f(a)=a\}$，证明：

(1) F有最小元；

(2)举例说明F未必是L的子格，F(作为L的子偏序集)构成格吗？

3. 设偏序集P有泛界I，且满足极小条件．证明：P的每一个保序自同态f至少有一个不动点．

§4.3 闭包运算

我们首先讨论一个集合的子集族(关于集合包含关系)构成完备格的条件．

设X是任意集合，X的一个子集族$\mathfrak{M}$叫做Moore**族**，如果满足：

(1) $X\in\mathfrak{M}$；

(2) 若 $A_\gamma\in\mathfrak{M}(\gamma\in\Gamma)$，则 $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\in\mathfrak{M}$．

与之相关的概念是所谓的闭包性质．

设p是集合X的子集可能具有的一个性质．如果满足：

(1) X具有性质p；

(2) X的任意多个具有性质p的子集的交集亦具有性质p；

则称p是一个**闭包性质**．

例1 设V是数域F上的向量空间，则V的全体子空间构成一个Moore族．若取定一个向量$\alpha\in V$，规定V的子集W具有性质$p\Longleftrightarrow\alpha\in W$，则$p$是一个闭包性质．

定理1 设X是任意集合．

(1) 若$\mathfrak{M}$是X的一个Moore族，则$(\mathfrak{M},\subseteq)$成为完备格．这时若规定$A\subseteq X$具有性质$p\Longleftrightarrow A\in\mathfrak{M}$，则$p$是一个闭

包性质；

(2)若p是X的一个闭包性质，则X的子集族$\mathfrak{M}=\{A \mid A\subseteq X,\ A$具有性质$p\}$是一个Moore族，从而$(\mathfrak{M},\ \subseteq)$是一个完备格.

证 (1)X的幂集格$P(X)$是完备格，$\mathfrak{M}\subseteq P(X)$. 由§4.1推论2可知，当$\mathfrak{M}$是Moore族时，$(\mathfrak{M},\ \subseteq)$是完备格. 后一论断显然成立.

(2)由闭包性质及Moore族之定义知前一论断成立.由(1)知后一断言正确. ▮

因此，集合X的一个Moore族确定X的一个闭包性质；反之，X的一个闭包性质也确定X的一个Moore族.

另一个重要概念是闭包运算.

所谓集合X上的一个**闭包运算**是指定义在X的子集上的算子(即X的幂集$P(X)$到自身的一个映射)：$A\mapsto\bar{A}$，并且满足：

C1 $A\subseteq\bar{A}$；$(\forall A\subseteq X)$

C2 $\bar{\bar{A}}\subseteq\bar{A}$；$(\forall A\subseteq X)$

C3 若$A\subseteq B$，则$\bar{A}\subseteq\bar{B}$. $(\forall A,\ B\subseteq X)$

在给定闭包运算下，$A(\subseteq X)$称作X的**闭子集**，如果$A=\bar{A}$.

定理2 给定集合X的一个闭包运算$A\mapsto\bar{A}\ (A\subseteq X)$，则

(1)X的全体闭子集构成一个Moore族. 反之，X的任意一个Moore族恰是X在某一闭包运算下的闭子集系；

(2)性质"集合X的子集是闭的"是一闭包性质. 反之，若p是X的一个闭包性质，则p对应X的某一闭包运算，

使得$A\subseteq X$是闭的$\Longleftrightarrow A$具有性质p.

证 (1) 令$\mathfrak{M}=\{A\mid A\subseteq X$且$A=\bar{A}\}$. 由C1得$X\subseteq\bar{X}\subseteq X$, 于是$X=\bar{X}\in\mathfrak{M}$. 若$A_\gamma\in\mathfrak{M}(\gamma\in\Gamma)$, $D=\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$, 则$D\subseteq A_\gamma=\bar{A}_\gamma$, $\forall\gamma\in\Gamma$. 由C3可知$\bar{D}\subseteq\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}\bar{A}_\gamma=\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=D$, 因此由C1得$D=\bar{D}\in\mathfrak{M}$. 故$\mathfrak{M}$是Moore族. 反之, 设$\mathfrak{M}$是$X$的Moore族, 对任意$A\subseteq X$, 规定$\bar{A}=\bigcap\{B\mid B\in\mathfrak{M}$且$A\subseteq B\}$, 则易证$A\mapsto\bar{A}$是一个闭包运算, 并且$\mathfrak{M}$恰是该闭包运算下的闭子集族.

由(1)及定理1知(2)成立. ▌

推论1 在给定闭包运算下, 集合X的全体闭子集对于集合包含关系$\subseteq$成为一个完备格, 其中下确界就是集合的交.

证 由定理1和定理2直接可得. ▌

闭包运算的概念可推广到格上来.

格L到自身的一个映射$x\mapsto\bar{x}$叫做**闭包运算**, 如果满足:

C1′ $x\leqslant\bar{x}$; $(\forall x\in L)$

C2′ $\bar{x}=\bar{\bar{x}}$; $(\forall x\in L)$

C3′ 若$x\leqslant y$, 则$\bar{x}\leqslant\bar{y}$. $(\forall x, y\in L)$.

当$x=\bar{x}$时, 则称x是L的**闭元素**.

定理3 设$x\mapsto\bar{x}$是格L的闭包运算, S表示L的全体闭元素组成的集合, 则

(1) S(作为L的子偏序集)是一个格, 其中任意两个元素在格S中的下确界同在L中的下确界一致.

(2) 若L是完备格, 则S也是完备格, 其中S的任意子集在格S中的下确界同在L中的下确界一致.

证 (1) 设$S\neq\varnothing$，若x，$y\in S$，则$x=\bar{x}$，$y=\bar{y}$。由C1′及C3′得$x\wedge y=\overline{x\wedge y}\in S$，于是$x\wedge y$也是$x$，$y$在$S$中的下确界. 另一方面，由C2′知$\overline{x\vee y}\in S$，并且$x=\bar{x}\leqslant\overline{x\vee y}$，$y=\bar{y}\leqslant\overline{x\vee y}$. 因此$\overline{x\vee y}$是$x$，$y$在$S$内的一个上界. 若$a\in S$是$x$，$y$在$S$内的任意一个上界，则$x\leqslant a$，$y\leqslant a$且$a=\bar{a}$. 于是$x\vee y\leqslant a$，从而$\overline{x\vee y}\leqslant\bar{a}=a$. 因此$\overline{x\vee y}$是$x$,$y$在$S$内的最小上界，故$S$是一个格，其中下确界同$L$中的下确界一致.

(2) 由(1)知S是格. 若$A\subseteq S$,$A\neq\varnothing$.仿(1)可证$\wedge A$是A在S内的下确界,$\overline{\vee A}$是A在S内的上确界,因此S是完备格. ∎

注 上述定理中的格S未必是格L的子格.

下面讨论拓扑空间的闭集系（见§3.6）.

定理4 设$\mathscr{T}$是集合X上的一个拓扑，则

(1) 闭集系$\mathscr{T}$是一个Moore族；

(2) $A\mapsto\bar{A}$（即A的闭包）是X上的闭包运算，并且满足$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$（$\forall A$，$B\subseteq X$）.

证 (1) 由定义显然.

(2) 对任意$A\subseteq X$，显然$A\subseteq\bar{A}$.若$B\in\mathscr{T}$，由闭包定义易证$A\subseteq B$当且仅当$\bar{A}\subseteq B$. 因此$\bar{A}=\bar{\bar{A}}$. 若$A\subseteq B$，显然$\bar{A}\subseteq\bar{B}$. 故$A\mapsto\bar{A}$是闭包运算. 由于$\bar{A}$，$\bar{B}\in\mathscr{T}$，因此$\bar{A}\cup\bar{B}\in\mathscr{T}$，即$\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$. 另一方面，$A\cup B\subseteq\bar{A}\cup\bar{B}$，于是$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\bar{A}\cup\bar{B}\subseteq\overline{A\cup B}$. 故$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$. ∎

推论2 拓扑空间$(X,\ \mathscr{T})$的全体闭集系（开集系）关于集合包含关系$\subseteq$成为一个完备的分配格，其中的下确界（上确界）就是集合的交（集合的并）.

证 由定理3知闭集系$\mathscr{T}$关于集合包含关系$\subseteq$是完备

格，并且下确界就是集合的交．由定理 4 (2) 又知$\mathscr{T}$是X的幂集格$P(X)$的子格，从而$\mathscr{T}$是分配格．对偶地可证全体开集系也是一个完备的分配格，并且其上确界就是集合的并．▮

拓扑空间$(X, \mathscr{T})$叫做**T_0-空间**，如果对任意$x, y\in X$，由$\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$可推得$x=y$．

有限的T_0-空间同有限偏序集之间存在一一对应．

定理5 设X是一个有限集．

(1) 若$\leqslant$是X上的偏序关系，$\mathscr{T}$表示X的全体M-闭子集（见 § 2.5）组成的集，则$(X, \mathscr{T})$是一个T_0-空间，并且$p\leqslant q \Longleftrightarrow p\in\overline{\{q\}}$ $(\forall p, q\in X)$．

(2) 若$\mathscr{T}$是X上的一个T_0-拓扑，在X中如下定义二元关系$\leqslant$：$p\leqslant q \Longleftrightarrow p\in\overline{\{q\}}$ $(\forall p, q\in X)$，则$\leqslant$是X上的偏序关系，并且$\mathscr{T}$恰是全体M-闭子集族．

(3) X上的全体偏序关系同X上全体T_0-拓扑之间，存在着一一对应．

证 (1) 由 § 2.5定理 2 知$\mathscr{T}=M(X)$是X上的一个拓扑．若$A\subseteq X$，易见

$$\bar{A}=\cap\{B \mid B\in\mathscr{T}\text{且}A\subseteq B\}=\bigcup_{a\in A}(a].$$

由此可知$p\leqslant q \Longleftrightarrow p\in\overline{\{q\}}$ $(\forall p, q\in X)$．

(2) 设$(X, \mathscr{T})$是T_0-空间．显然$p\in\overline{\{p\}}$，因此$p\leqslant p$ $(\forall p\in X)$．若$p\leqslant q$且$q\leqslant p$，则$p\in\overline{\{q\}}, q\in\overline{\{p\}}$．由此可得$\overline{\{p\}}=\overline{\{q\}}$，于是$p=q$．若$p\leqslant q$，$q\leqslant r$，则$p\in\overline{\{q\}}$，$q\in\overline{\{r\}}$，因而$p\in\overline{\overline{\{r\}}}=\overline{\{r\}}$，即$p\leqslant r$．故$\leqslant$是$X$上的偏序关系．对任意$A\subseteq X$，（注意$A$是有限集），易证$A$是$M$-闭子集$\Longleftrightarrow A=\bigcup\limits_{a\in A}(a]=\bigcup\limits_{a\in A}\overline{\{a\}}\Longleftrightarrow A$是闭集．

由(1)，(2)可得(3)．▮

练 习

1. 举例说明集合X的Moore族$\mathfrak{M}$未必是幂集格$P(X)$的子格.

2. 利用本节结果证明:

(1) 格L的全体子格(理想)关于集合包含关系$\subseteq$成为完备格;

(2) 群G的全体子群(不变子群)关于集合包含关系$\subseteq$成为完备格.

§4.4 配极与Galois联络

本节讨论如何由两个集合间的二元关系导出两个完备格间的对偶同构.

设ρ是集合I与集合J间的一个二元关系, $X\subseteq I$, $Y\subseteq J$. 令

$$X^* = \{y \mid y\in J, \text{ 且} x\rho y, \ \forall x\in X\}.$$
$$Y^+ = \{x \mid x\in I, \text{ 且} x\rho y, \ \forall y\in Y\}.$$

并称X^*是X的**极**, Y^+是Y的**极**.

定理1 在上述假设下,

(1) 求"极"满足下述性质:

i) 若$X_1\subseteq X_2$, 则$X_1^*\supseteq X_2^*$; $(\forall X_1, X_2\subseteq I)$

ii) 若$Y_1\subseteq Y_2$, 则$Y_1^+\supseteq Y_2^+$; $(\forall Y_1, Y_2\subseteq J)$

iii) $X\subseteq(X^*)^+$, $Y\subseteq(Y^+)^*$; $(\forall X\subseteq I, Y\subseteq J)$

iv) $((X^*)^+)^* = X^*$, $((Y^+)^*)^+ = Y^+$

$$(\forall X \subseteq I,\ Y \subseteq J)$$

(2) 映射$X \mapsto (X^*)^+$和$Y \mapsto (Y^+)^*$分别是集合I与J上的闭包运算，并且$X \mapsto X^*$和$Y \mapsto Y^+$分别是I，J(在上述闭包运算下)的闭子集完备格(§4.3推论1)间互逆的对偶同构.

证 (1)由定义知i)—iii)显然成立. 设$X \subseteq I$，$Y \subseteq J$，由iii)知$X \subseteq (X^*)^+$，$Y \subseteq (Y^+)^*$. 由ii)可得

$$X^* \supseteq ((X^*)^+)^*,\quad Y^+ \supseteq ((Y^+)^*)^+.$$

但由iii)，$X^* \subseteq ((X^*)^+)^*$，$Y^+ \subseteq ((Y^+)^*)^+$. 故

$$((X^*)^+)^* = X^*,\quad ((Y^+)^*)^+ = Y^+,$$

即iv)成立.

(2)由(1)易证$X \mapsto (X^*)^+$与$Y \mapsto (Y^+)^*$都是闭包运算，且在此闭包运算下，I的闭子集皆形如$Y^+(Y \subseteq J)$，J的闭子集皆形如$X^*(X \subseteq I)$. 由i)及iv)知$X \mapsto X^*$与$Y \mapsto Y^+$是I，J的闭子集完备格之间互逆的对偶同构. ∎

上述对偶同构也叫做**配极**. 这是因为它推广了解析几何中"极"间的对偶同构.

推论1 在上述定理1中，若$I = J$并且ρ是对称的，则$X^* = X^+(\forall X \subseteq I)$，并且$X \mapsto X^*$是闭子集完备格的一个对合对应. 即对于$I$的闭子集$X$，$Y$有

(1) $(X^*)^* = X$；

(2) $(X \wedge Y)^* = X^* \vee Y^*$，$(X \vee Y)^* = X^* \wedge Y^*$.

若ρ还是反自反的(即不存在$x \in I$适合$x\rho x$，但对所有$x \neq y$，$x\rho y$)，则满足

(3) $X \wedge X^* = \varnothing$，$X \vee X^* = I$.

证 由定理1知(1)、(2)成立. 若ρ还是反自反的，则

$$X^* = \{y \mid y\in I,\ 且 x\rho y,\ \forall x\in X\}$$
$$= \{y \mid y\in I-X\}.$$

即$X^*=I-X$. 因此$X\wedge X^*=\varnothing$，由(1)，(2)得

$$X\vee X^*=I.\blacksquare$$

例1 令$I=J$是任意环，$x\rho y$当且仅当$xy=0$，则X^*是右理想. X^+是左理想.

例2 令$A=(a_{ij})$是$n\times n$阶非奇异方阵. 对于n维射影空间I的两个矢量$\xi=(x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n)$及$\eta=(y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n)$，定义：$\xi\rho\eta\Longleftrightarrow\sum_{i,j}x_ia_{ij}y_j=0$，则$I$的"闭子集"是它的点、直线、平面及其它子空间. 若X是这样的子空间，则X^*就是在古典几何意义下，X关于原点O的"极".

例3 设I为任意集合. 令$x\rho y\Longleftrightarrow x\neq y$，则推论1中(1)—(3)成立，$I$的每一个子集都是闭的. 对合对应$X\mapsto X^*$把每个子集$X$变成它在$I$中的补集(即$X^*=I-X$).

上面的方法可以推广到偏序集上.

设P，Q是两个偏序集. 映射

$$\varphi:\ P\to Q \quad 与 \quad \psi:\ Q\to P$$
$$x\mapsto x^* \qquad\qquad y\mapsto y^+$$

叫做一个Galois联络，如果满足：

(1) 若$x_1\leqslant x_2$，则$x_1^*\geqslant x_2^*$； $(\forall x_1,\ x_2\in P)$

(2) 若$y_1\leqslant y_2$，则$y_1^+\geqslant y_2^+$； $(\forall y_1,\ y_2\in Q)$

(3) $x\leqslant(x^*)^+$，$y\leqslant(y^+)^*$； $(\forall x\in P,\ y\in Q)$.

由定义直接可得，在上述Galois联络下，有

(4) $((x^*)^+)^*=x^*$，$((y^+)^*)^+=y^+$，$(\forall x\in P, y\in Q)$.

下面给出与上述定义等价的条件.

定理2 设P，Q是两个偏序集，则映射：

$$\varphi: P \longrightarrow Q \quad 与 \quad \psi: Q \longrightarrow P$$
$$x \mapsto x^* \qquad\qquad y \mapsto y^+$$

是一个Galois联络，当且仅当对任意$a \in P$及$b \in Q$，有
$$b \leqslant a^* \Longleftrightarrow a \leqslant b^+. \qquad (*)$$

证 设φ，ψ是一个Galois联络，$a \in P$，$b \in Q$. 若$b \leqslant a^*$，则$(a^*)^+ \leqslant b^+$，于是$a \leqslant (a^*)^+ \leqslant b^+$. 同理若$a \leqslant b^+$，则有$b \leqslant a^*$. 故(*)成立. 反之，设条件(*)成立. 若$x \in P$，$y \in Q$，则由$x^* \leqslant x^*$得$x \leqslant (x^*)^+$. 同理$y \leqslant (y^+)^*$. 若$x_1 \leqslant x_2$ $(x_1, x_2 \in P)$，由刚证得的结果知$x_2 \leqslant (x_2{}^*)^+$，于是$x_1 \leqslant (x_2{}^*)^+$. 由(*)得$x_2{}^* \leqslant x_1{}^*$. 同理，若$y_1 \leqslant y_2$ $(y_1, y_2 \in Q)$，则$y_2{}^+ \leqslant y_1{}^+$. 故$\varphi$，$\psi$是一个Galois联络. ▌

两个格间的Galois联络可以各自导出一个闭包运算.

定理3 设L，M是两个格，φ: $L \longrightarrow M$ $(x \mapsto x^*)$与ψ: $M \longrightarrow L$ $(y \mapsto y^+)$是一个Galois联络，则

(1) 映射$x \mapsto (x^*)^+$与$y \mapsto (y^+)^*$分别是格L与M的闭包运算;

(2) 映射$x \mapsto x^*$与$y \mapsto y^+$是L与M的闭元素格(§4.3定理3)间的互逆对偶同构;

(3) 若L，M都是完备格，则(2)中的映射是L，M的闭元素完备格间的互逆对偶同构，并且对L的任意闭元素子集A及M的闭元素子集B，均有
$$\left(\bigwedge_{x \in A} x\right)^* = \bigvee_{x \in A} x^*, \qquad \left(\bigvee_{x \in A} x\right)^* = \bigwedge_{x \in A} x^*;$$
$$\left(\bigwedge_{y \in B} y\right)^+ = \bigvee_{y \in B} y^+, \qquad \left(\bigvee_{y \in B} y\right)^+ = \bigwedge_{y \in B} y^+.$$

证 (1) 由Galois联络的定义和格的闭包运算的定义(§4.3)，结论显然成立.

(2) 由§4.3定理3知在上述闭包运算下，L，M的闭

元素集是格．由Galois联络定义中的条件(1)，(2)及(4)易见映射$x\mapsto x^*$与$y\mapsto y^+$是互逆的对偶同构．

(3)若L，M是完备格，则相应的闭元素格也是完备格，且$L(M)$的闭元素皆形如$y^+(x^*)$．若A是L的闭元素子集，易见

$$(\bigwedge_{x\in A} x)^* \geqslant \bigvee_{x\in A} x^*.$$

若$a^*(a\in L)$是M中一闭元素，且$a^*\geqslant x^*(\forall x\in A)$，则有

$$(a^*)^+\leqslant (x^*)^+ = x \quad (\forall x\in A),$$

于是$(a^*)^+\leqslant \bigwedge_{x\in A} x$．由此得

$$a^* = ((a^*)^+)^* \geqslant (\bigwedge_{x\in A} x)^*,$$

故

$$(\bigwedge_{x\in A} x)^* = \bigvee_{x\in A} x^*.$$

同理证其余诸式成立．▌

在上述定理的假设下，对于任意$X\subseteq L$，$Y\subseteq M$，记

$$X^* = \{x^* \mid x\in X\}, \quad Y^+ = \{y^+ \mid y\in Y\}.$$

易证下述结果：

推论2 在定理3的条件下，

(1)对任意X，$X_i\subseteq L$及Y，$Y_i\subseteq M$，$(i=1\quad 2)$，有

i) 若$X_1\subseteq X_2$，则$X_1^*\supseteq X_2^*$；

ii) 若$Y_1\subseteq Y_2$，则$Y_1^+\supseteq Y_2^+$；

iii) $X\subseteq (X^*)^+$，$Y\subseteq (Y^+)^*$；

iv) $((X^*)^+)^* = X^*$，$(Y^+)^*)^+ = Y^+$．

(2)映射$X\mapsto (X^*)^+$与$Y\mapsto (Y^+)^*$分别是集合L和M上的闭包运算；

(3)映射$X\mapsto X^*$与$Y\mapsto Y^+$给出了L与M(在上述闭包运算下)的闭子集完备格(§4.3推论1)间的互逆对偶同构．

证明留作练习．▌

偏序集P与Q的Galois联络φ：$P\longrightarrow Q(x\mapsto x^*)$及$\psi$：$Q\longrightarrow P(y\mapsto y^+)$称为**对称**的，如果$P=Q$，并且$\varphi=\psi$.（这时称之为$P$上的**对称Galois联络**）

推论3 设φ：$x\mapsto x^*$是格L上的对称Galois联络，则对L的任意闭子集X，Y，有

$$(X\wedge Y)^*=X^*\vee Y^*,\ (X\vee Y)^*=X^*\wedge Y^*.$$

证 由推论2直接可得. ▮

练　　习

1.证明本节推论2.

2.在定理1(2)中，设X_1，X_2是I的闭子集．证明：

$$X_1\wedge X_2=X_1\cap X_2;$$

$$X_1\vee X_2=(X_1{}^*\cap X_2{}^*)^+\subseteq X_1\cup X_2.$$

3.设S是有O的交半格，$a\in S$．若集合$\{x\mid x\in S$，且$x\wedge a=O\}$有最大元a^*，则称a^*是a的一个**伪补**．若S中任意元都有伪补，则称S是伪补交半格．证明：在一个伪补交半格S中，求伪补$a\mapsto a^*$是一个对称Galois联络.

§4.5 按切割的完备化

Dedekind的实数分割理论可以推广到偏序集上来.

设$(P,\leqslant)$是一个偏序集，A，B是P的两个子集．如果满足

(1)$a\leqslant b$，$\forall a\in A$，$b\in B$；

(2)若$x\leqslant b$，$\forall b\in B$，则$x\in A$；

(3)若$a\leqslant x$，$\forall a\in A$，则$x\in B$；

则称A，B是P的一个**切割**．A叫做**下类**，B叫做**上类**.

利用§2.3引用的符号，容易证明以下

定理1 若A，B是偏序集$(P, \leqslant)$的两个子集，则下述条件等价：

(1) A，B是P的一个切割；

(2) $A = M_t B$，$B = M_a A$；

(3) $A = M_t(M_a A)$，$B = M_a(M_t B)$.

证明留作练习. ▌

显然，一个切割完全由下类所确定. 因此我们就称下类A为P的一个切割.

若用ρ表示偏序关系$\leqslant$（即$x\rho y \Longleftrightarrow x \leqslant y$），利用§4.4的符号，对任意$A \subseteq P$，显然有

$$A^* = M_a A, \qquad A^+ = M_t A.$$

特别地，对于$a \in P$，有

$$\{a\}^* = M_a\{a\} = [a), \ \{a\}^+ = M_t\{a\} = (a].$$

推论1 设P是任意偏序集，A是P的子集，$a \in P$，则

(1) A是P的切割$\Longleftrightarrow A = (A^*)^+$（即$A = M_t(M_a A)$）；

(2) 闭截段$(a]$是P的一个切割；

(3) 若$A_i (i \in I)$是P的切割，则$\bigcap\limits_{i \in I} A_i$亦然.

证 由§4.4定理1及本节定理1知(1)，(3)成立. 若$a \in P$，则$\{a\}^+ = (a]$，由此知$(a] = ((a]^*)^+$. 故$(a]$是P的切割，于是(2)成立. ▌

若记$\mathscr{L}(P)$为偏序集P的所有切割组成的集合，记$\Phi(P)$为P的所有闭截段组成的集合，即

$$\mathscr{L}(P) = \{A \mid A \subseteq P, \text{ 且 } A = (A^*)^+\},$$

$$\Phi(P) = \{(a] \mid a \in P\},$$

则有下述

定理2 设$(P, \leqslant)$是任意偏序集，则

(1)$\mathscr{L}(P)$关于集合包含关系$\subseteq$成为完备格；

(2)$\Phi(P)\subseteq\mathscr{L}(P)$，并且映射$\varphi: a\mapsto(a]$是$P$到$\Phi(P)$(作为$\mathscr{L}(P)$的子偏序集)上的序同构，并且保持下确界(当存在时)。

(3)P可(序同构)嵌入到一个完备格中，并且保持上确界与下确界(当存在时)。

证 (1)由推论1知$A\in\mathscr{L}(P)$当且仅当A是在§4.4定理1意义下的闭子集，因此$(\mathscr{L}(P), \subseteq)$是完备格。

(2)由推论1知$\Phi(P)\subseteq\mathscr{L}(P)$。显然$\varphi$是双射，并且对任意$x, y\in P$，$x\leqslant y\Longleftrightarrow\varphi(x)=(x]\subseteq(y]=\varphi(y)$，因此$\varphi$是序同构。设$A\subseteq P$，$\bigwedge A=x$存在，则$x\leqslant a(\forall a\in A)$。于是$\varphi(x)\subseteq\varphi(a)(\forall a\in A)$，即$\varphi(x)\subseteq\bigcap\limits_{a\in A}\varphi(a)$。若$b\in\bigcap\limits_{a\in A}\varphi(a)$，则$b\in\varphi(a)=(a](\forall a\in A)$。由此可得$b\leqslant\bigwedge A=x$，从而$b\in(x]=\varphi(x)$，故$\varphi(\bigwedge A)=\varphi(x)=\bigcap\limits_{a\in A}\varphi(a)$。

(3)由(2)知映射$\varphi: a\mapsto(a]$将P嵌入完备格$\mathscr{L}(P)$中，并且保持下确界。若$A\subseteq P$，且$x=\bigvee A$存在，则$a\leqslant x(\forall a\in A)$，从而$\varphi(a)\subseteq\varphi(x)(\forall a\in A)$，即$\varphi(x)$是$\{\varphi(a)\mid a\in A\}$的一个上界。若$B\in\mathscr{L}(P)$使$\varphi(a)\subseteq B(\forall a\in A)$，则易见$A\subseteq B$。因此由§2.3推论1及§4.4定理1知$\{x\}=(A^*)^+\subseteq(B^*)^+=B$，于是$\varphi(x)=(x]\subseteq B$。故$\varphi(x)$是$\{\varphi(a)\mid a\in A\}$的上确界，即$\varphi(\bigvee A)=\bigvee\{\varphi(a)\mid a\in A\}$。因此$\varphi$也保持上确界。∎

称上述完备格$\mathscr{L}(P)$为偏序集P**按切割的完备化**。

设A是格L的理想，若$A=(A^*)^+$(即A是L的一个切割)，则称A为L的一个**闭理想**。

推论2 设L是任意格，则

(1) L可同构嵌入完备格$\mathscr{L}(P)$中；

(2) L是完备格$\Longleftrightarrow L$的每一个闭理想是主理想.

证 (1)显然. 下证(2). 设L的任意闭理想是主理想. 任取$A\subseteq L$，则$(A^*)^+$是L的闭理想，因此存在$a\in L$，使得$(A^*)^+=(a]$. 由于$A\subseteq(A^*)^+$，所以a是A的上界. 若$b\in L$是A的任意上界，则$b\in A^*$. 由于$a\in(A^*)^+$，因此$a\leqslant b$，故a是A的上确界. 由§4.1定理1知L是完备格.

反之，若L是完备格，$A=(A^*)^+$是L的闭理想. 令$a=\bigvee A$，则$A=(A^*)^+=(a]$是主理想. ▌

设偏序集$(D,\leqslant)$是有向集(§2.3练习5). 令

$$\mathscr{L}^*(D)=\begin{cases}\mathscr{L}(D)-\{\varnothing\}, & \text{当}D\text{无零元时}\\ \mathscr{L}(D)-\{D\}, & \text{当}D\text{无单位元时}\end{cases}$$

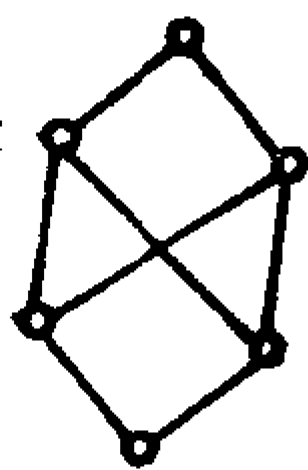
则有

推论3 若偏序集$(D,\leqslant)$是有向集，则$\mathscr{L}^*(D)$关于集合包含关系$\subseteq$成为条件备格.

证明留作练习. ▌

称上述条件备格$\mathscr{L}^*(D)$为有向集D的**条件备化**.

练　习



P_6
图 4.5.1

1. 补证定理1.

2. 画出图4.5.1表示的偏序集P_6按切割完备化的示图.

3. 证明本节推论3.

4. 若L是模格(分配格)，能否断定按切割的完备化$\mathscr{L}(L)$还是模格(分配格)？试举例说明.

第五章 模格与半模格

本章首先讨论了半模格的性质(§5.1)、模对(§5.2)及M-独立性(§5.3)，接着进一步研究了模格的性质(§5.4)、Dedekind转置原则及JHS定理(§5.5)，最后讨论了模格中元素的既约分解(§5.6)。

§5.1 半模格

在§2.4中我们曾定义了上(下)半模偏序集.

一个格$(L, \leqslant)$称为**上半模格**(简称**半模格**)，如果作为偏序集L是上半模的. 即对于任意$a, b\in L$，$a\neq b$，满足条件

(σ)若存在$c\in L$使a，b同时覆盖c，则存在$d\in L$，使d同时覆盖a与b.

对偶地可定义**下半模格**.

下面给出上半模格的等价条件.

定理1 设$(L, \leqslant)$是任意格，则下述条件等价：

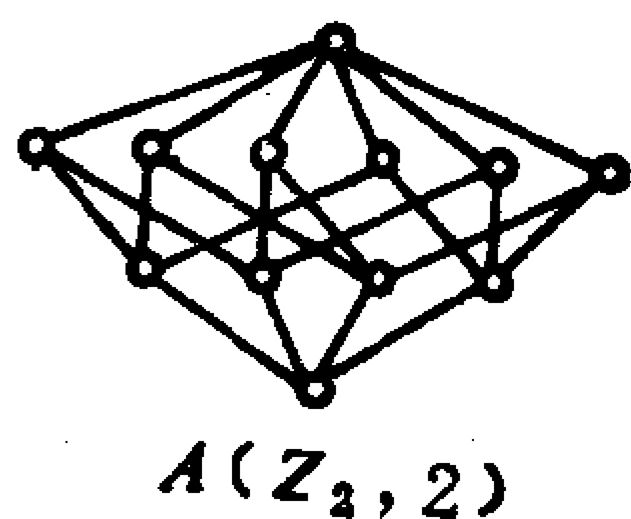
(1)L是上半模格；

(2)若a，b同时覆盖c($a, b, c\in L$，$a\neq b$)，则$a\vee b$同时覆盖a与b；

(3)若a，b同时覆盖$a\wedge b$($a, b\in L$，$a\neq b$)，则$a\vee b$同时覆盖a与b.

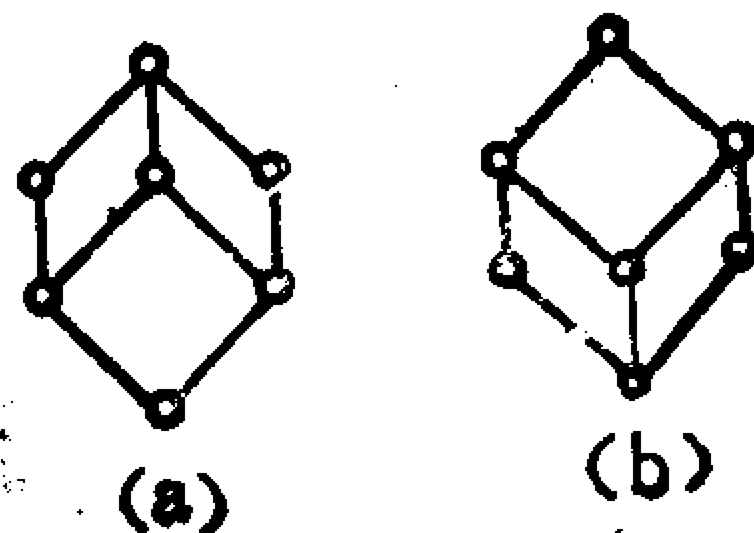
证 (1)⇒(2)⇒(3)显然. 若(3)成立, 并设a, b同时覆盖c(a, b, $c\in L$, $a\neq b$), 易证$c=a\wedge b$. 于是$d=a\vee b$同时覆盖a与b, 故(3)⇒(1)成立. ▌

例1 设F是任意域, n为自然数, 则F上n维仿射空间的所有子空间集合$A(F, n)$依集合包含关系是一个上半模格. 图5.1.1是 $A(Z_2, 2)$的示图. 其中Z_2是含2个元素的素域.



$A(Z_2, 2)$

图 5.1.1



(a)　　(b)

图 5.1.2

例2 设S是n元集合, π_n表示S上所有等价关系(即S的分类)组成的集合. 对于ρ, $\tau\in\pi_n$, 规定$\rho\leqslant\tau\Longleftrightarrow x\rho y$蕴涵$x\tau y$, 则$\pi_n$是长为$n-1$的上半模格. 其中$\tau$覆盖$\rho\Longleftrightarrow\tau$(的分类)是经$\rho$(的分类)合并其中两个等价类而得到.

一般地, 一个上半模格未必是下半模格, 反之亦然. 一个上(下)半模格的子格未必是上(下)半模格. 例如图5.1.2给出这样的例子, 其中(a)表示的格是上半模格但非下半模格, (b)表示的是下半模格但非上半模格. 二者都包含一个子格既不是上半模的, 又不是下半模的(读者自己找出).

作为§2.4定理4的直接推论可知, 任何有限长的上(下)半模格满足Jordan-Dedekind链条件. 这里可以去掉"有限长"的条件, 并且证明亦可简化.

定理2 任何上(下)半模格满足J-D链条件.

证 设L是上半模格，a，$b\in L$，$a\leqslant b$，A，B是连接a，b的两个有限极大链：

$$A:\ a=x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_n=b,$$

$$B:\ a=y_0\prec y_1\prec\cdots\prec y_m=b.$$

对链A的长n使用归纳法.

当$n=0$或$n=1$时，结论显然成立.

设$n>1$，并假定对于A的长小于n时结论已经成立. 不妨也假定$m>1$. 若$x_1=y_1$，则由归纳假设可知$n-1=m-1$，从而$n=m$，结论成立. 若$x_1\neq y_1$，由于L是上半模格，且x_1，y_1同时覆盖a，于是有$z_2=x_1\vee y_1$同时覆盖x_1与y_1（定理1）. 令

$$z_{k+1}=x_k\vee y_1$$

$$(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1),$$

则有 $z_2\leqslant z_3\leqslant\cdots\leqslant z_n=b$，

并且z_{k+1}至多覆盖z_k，$(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$，因此可以得到连接z_2，b的一个有限极大链：

$$z_2=z_{20}\prec z_{21}\prec\cdots\prec z_{2i}=b.$$

于是得到下述有限极大链（图5.1.3）：

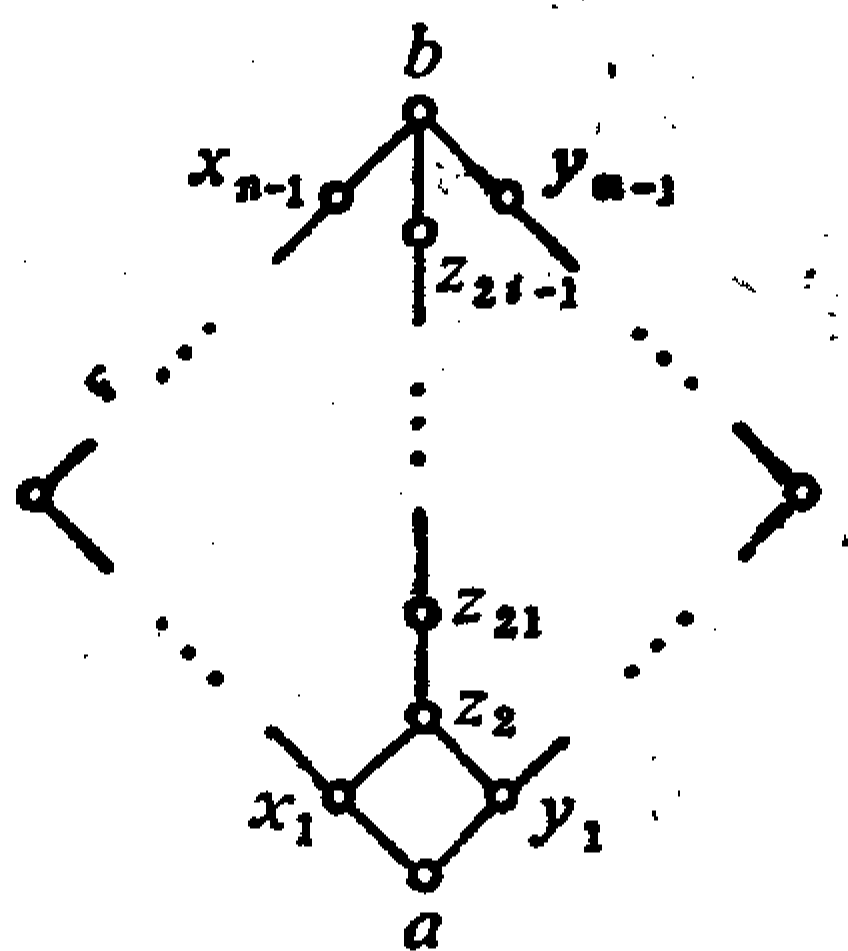


图 5.1.3

$$A_1:\ x_1\prec x_2\prec\cdots\prec x_n=b,$$

$$A_2:\ x_1\prec z_2\prec z_{21}\prec\cdots z_{2i}=b,$$

$$B_1:\ y_1\prec y_2\prec y_3\prec\cdots\prec y_m=b,$$

$$B_2:\ y_1\prec z_2\prec z_{21}\prec\cdots\prec z_{2i}=b,$$

其中A_1，B_1的长分别为$n-1$，$m-1$；A_2，B_2的长为$i+1$. 由归纳假设得$n-1=i+1=m-1$，即$n=m$. 故结论对于n也成

立.

同理证下半模格也满足J-D链条件. ∎

推论1 设L是有界有限长的上半模格, a, b, c是L的任意元.

(1)若$a\leqslant b\leqslant c$, 则$l(c/a)=l(c/b)+l(b/a)$;

(2)$l(a\vee b/a)+l(a/a\wedge b)=l(a\vee b/b)+l(b/a\wedge b)$;

(3)$l(a\vee b/a)\leqslant l(b/a\wedge b)$.

证 只证(3), 其余留作练习.

对$l(b/a\wedge b)=m$使用归纳法.若$m=0$,结论显然成立. 若$m=1$, 则b覆盖$a\wedge b$. 不妨设$a\wedge b<a$, 并且设

$$a\wedge b=x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_n=a$$

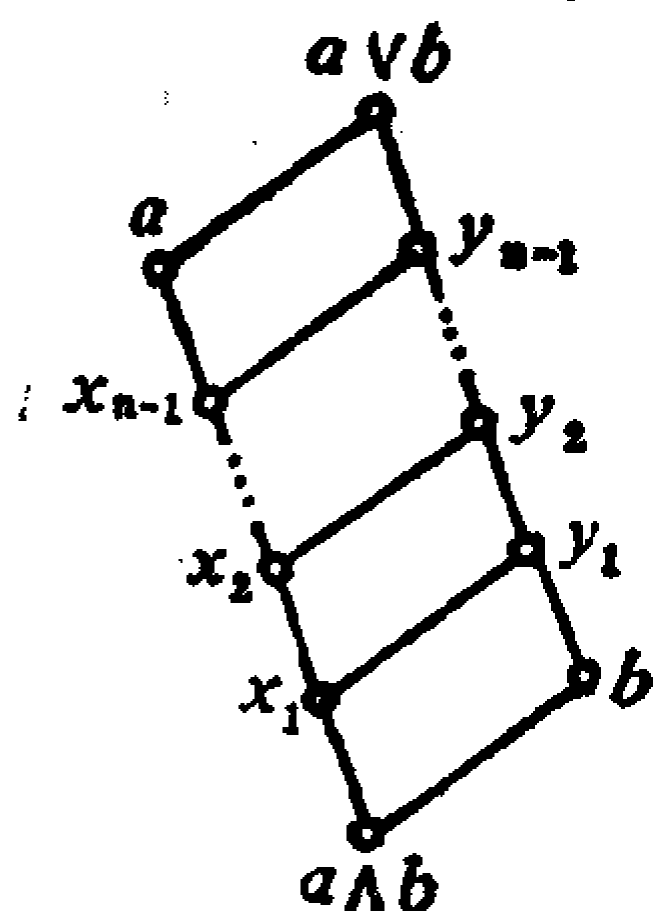


图 5.1.4

是连接$a\wedge b$, a的有限极大链. 令$y_i=x_i\vee b$, $i=0$, 1, 2, $\cdots$, n, 显然$y_0=b$, $y_n=a\vee b$ (见图5.1.4).由于L是上半模格,易证y_{i+1}同时覆盖x_{i+1}和y_i($i=0,1,2,\cdots,n-1$).特别, $y_n=a\vee b$覆盖$x_n=a$. 因此$l(a\vee b/a)=1=l(b/a\wedge b)$, 即$m=1$时结论成立.

设$m>1$, 且假定$l(b/a\wedge b)\leqslant m-1$时结论已经成立. 当$l(b/a\wedge b)=m$时, 任意取定$c\in L$, 使$a\wedge b<c<b$. 显然有

$$a\leqslant a\vee c\leqslant a\vee b=(a\vee c)\vee b.$$

$$a\wedge b=a\wedge c<c\leqslant(a\vee c)\wedge b\leqslant b,$$

其中

$$l(c/a\wedge c)=l(c/a\wedge b)<m,\quad l(b/(a\vee c)\wedge b)\leqslant l(b/c)<m.$$

由归纳假设知

$$l(a\vee c/a)\leqslant l(c/a\wedge b),$$
$$l(a\vee b/a\vee c)\leqslant l(b/(a\vee c)\wedge b)$$

由(1)得

$$l(a\vee b/a)=l(a\vee c/a)+l(a\vee b/a\vee c)\leqslant l(c/a\wedge b)+l(b/(a\vee c)\wedge b)\leqslant l(c/a\wedge b)+l(b/c)=l(b/a\wedge b).$$

因此当$l(b/a\wedge b)=m$时，结论成立. ▌

推论2 在有界有限长的上半模格中，对任意元素a,b，有

$$l(a\vee b/a)-l(b/a\wedge b)=l(a\vee b/b)-l(a/a\wedge b)\leqslant 0$$

证 由推论1直接可得. ▌

利用上述结果可以进一步刻划有限长的上半模格.

定理3 设L是有限长的格，则下述条件等价：

(1) L是上半模格；

(2) L满足J-D链条件及维数不等式：

$$h(x\wedge y)+h(x\vee y)\leqslant h(x)+h(y),\quad \forall x,\ y\in L.$$

(3) 对任意x，$y\in L$，若x覆盖$x\wedge y$. 则$x\vee y$覆盖y.

证 (1)⇒(2). 设L是上半模格，由定理2知L满足J-D链条件. 若x，$y\in L$，由推论1得

$$h(x\vee y)-h(x)=l(x\vee y/x)\leqslant l(y/x\wedge y)=h(y)-h(x\wedge y).$$

移项即 $h(x\wedge y)+h(x\vee y)\leqslant h(x)+h(y)$.

(2)⇒(3). 设(2)成立，由§2.4定理3知L被高度函数h所分次. 若x覆盖$x\wedge y$，则 $h(x)=h(x\wedge y)+1$. 由(2)中维数不等式得$h(x\vee y)\leqslant h(y)+1$. 如果$y=x\vee y$，则有$x\wedge y=x$，与$x$覆盖$x\wedge y$矛盾. 因此必有$y<x\vee y$，于是$h(y)<h(x\vee y)$，

结合上面的结果推得 $h(x\vee y)=h(y)+1$. 故 $x\vee y$ 覆盖 y.

(3)⇒(1). 由定理1(3)显然. ▌

推论3 设 L 是有限长的上半模格.

(1)若 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_n$ 是连接 x_0, x_n 的有限极大链, 则对于任意 $a\in L$, $a\vee x_0\leqslant a\vee x_1\leqslant\cdots\leqslant a\vee x_n$ 是连接 $a\vee x_0$, $a\vee x_n$ 的有限极大链(去掉重复项);

(2)对任意 a, $p\in L$, 若 p 为原子, 则 $p\leqslant a$, 或者 $a\prec a\vee p$;

(3)若 a, p, $q\in L$, p, q 为原子且 $a<a\vee q\leqslant a\vee p$, 则 $a\vee p=a\vee q$;

(4)若 $p_i\in L$ 是原子 $(i=1, 2, \cdots, n)$, 则 $h(p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n)\leqslant n$, 且等号成立当且仅当 $(p_1\vee\cdots\vee p_i)\wedge p_{i+1}=O$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$.

证 (1) 只须证明 $a\vee x_{i+1}$ 至多覆盖 $a\vee x_i$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n-1)$. 由于 $x_i\leqslant x_{i+1}\wedge(a\vee x_i)\leqslant x_{i+1}$, 并且 $x_i\prec x_{i+1}$, 因此只有两种可能: 或者 $x_{i+1}\wedge(a\vee x_i)=x_{i+1}$, 这时导出 $a\vee x_i=a\vee x_{i+1}$; 或者 $x_{i+1}\wedge(a\vee x_i)=x_i$, 这时导出 $a\vee x_i\prec a\vee x_{i+1}$.

(2) 若 p 是原子, 则 $O\prec p$ 是极大链. 由(1)知 $a\leqslant a\vee p$ 是极大链(除去重复项), 因此或 $a=a\vee p$, 这时有 $p\leqslant a$; 或 $a\prec a\vee p$.

(3) 设 $a<a\vee q\leqslant a\vee p$, p, q 为原子. 由(1)知或 $p\leqslant a$, 这时 $a\vee p=a$, 矛盾; 或 $a\prec a\vee p$, 故必有 $a\vee p=a\vee q$.

(4) 对 n 使用归纳法. 当 $n=1$ 时结论显然成立. 设 $n>1$, 并且假定原子的个数少于 n 时结论已经成立. 对 n 个原子 p_i $(i=1, 2, \cdots, n)$, 令 $a=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_{n-1}$. 由(2)知或

$p_n \leqslant a$，或$a \prec a \vee p_n$．若$p_n \leqslant a$，则$a \vee p_n = a$，于是由归纳假设得

$$h(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = h(a \vee p_n) = h(a) \leqslant n-1 < n.$$

若$a \prec a \vee p_n$，则

$$h(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = h(a \vee p_n) = h(a) + 1$$
$$\leqslant (n-1) + 1 = n.$$

假若等号成立，即$h(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = n$，对任意$i (i=1, 2, \cdots, n-1)$，令

$$a = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_i, \quad b = p_{i+1} \vee \cdots \vee p_n,$$

则有 $h(a) \leqslant i$，$h(b) \leqslant n-i$，$h(a \vee b) = n$．由定理3得

$$h(a \wedge b) + n = h(a \wedge b) + h(a \vee b) \leqslant h(a) + h(b)$$
$$\leqslant i + (n-i) = n.$$

由此推出$h(a \wedge b) = 0$，从而$a \wedge b = O$，于是$a \wedge p_{i+1} = O$．反之，若$(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_i) \wedge p_{i+1} = O$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$，由(2)可证

$$p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_i \prec p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_i \vee p_{i+1}$$
$$(i=1, 2, \cdots, n-1),$$

于是得$h(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = n$．▌

利用对偶原则可得出下半模格的有关结果．

练　习

1．证明：格的积$\prod_{i \in I} L_i$是上（下）半模格$\Longleftrightarrow$每一个L_i $(i \in I)$是上（下）半模格．

2．证明：上（下）半模格的凸子格是上（下）半模格．

3．证明：模格一定是上（下）半模格．

4．证明：若格L及其子格皆满足Jordan-Dedekind链条

件，则L是上(下)半模格。

5.补证推论1。

§5.2 模 对

设L是任意格，a，$b\in L$，则映射

$$\psi_a: x\mapsto x\vee a \quad 及 \quad \varphi_b: y\mapsto y\wedge b$$

分别是L的并自同态和交自同态，并且

$$\psi_a(L)=[a),\ \varphi_b(L)=(b]\ (\S 3.4定理3).$$

对任意$x\in[a\wedge b,\ b]$，$y\in[a,\ a\vee b]$，显然有

$$\psi_a(x)=x\vee a\in[a,\ a\vee b],$$

$$\varphi_b(y)=y\wedge b\in[a\wedge b,\ b],$$

并且易证

$$(\psi_a\varphi_b\psi_a)(x)=\psi_a(x),\ (\varphi_b\psi_a\varphi_b)(y)=\varphi_b(y).$$

即有下述

定理1 (Schwan引理)设L是任意格，a，$b\in L$，则ψ_a是从$[a\wedge b,\ b]$到$[a,\ a\vee b]$的序同态，φ_b是从$[a,\ a\vee b]$到$[a\wedge b,\ b]$的序同态，并且满足：

(1)在$[a,\ a\vee b]$上，$\varphi_b\psi_a\varphi_b=\varphi_b$；

(2)在$[a\wedge b,\ b]$上，$\psi_a\varphi_b\psi_a=\psi_a$. ▌

格L中的有序元素对$(a,\ b)$叫做一个**模对**，记作aMb或$(a,\ b)M$，如果满足

(MP) $x=(x\vee a)\wedge b=\varphi_b\psi_a(x)$，$\forall\ x\in[a\wedge b,\ b]$.

对偶地，称(a,b)为一个**对偶模对**，记作aM^*b或$(a,b)M^*$，如果满足

(M*P) $y=(y\wedge a)\vee b=\psi_b\varphi_a(y)$，$\forall\ y\in[b,\ a\vee b]$.

由定义可得

定理2 对任意格L及a，$b\in L$，下述条件等价：

(1) aMb；

(2) $t\vee(a\wedge b)=(t\vee a)\wedge b$，$\forall t\in L$且$t\leqslant b$；

(3) ψ_a：$[a\wedge b, b]\to[a, a\vee b]$是单射；

(4) φ_b：$[a, a\vee b]\to[a\wedge b, b]$是满射。

证 (1)$\Longleftrightarrow$(2)．设aMb，$t\leqslant b$ ($t\in L$)．令$x=t\vee(a\wedge b)$，显然$x\in[a\wedge b, b]$．由定义知$x=(x\vee a)\wedge b$，即

$$t\vee(a\wedge b)=(t\vee(a\wedge b)\vee a)\wedge b=(t\vee a)\wedge b.$$

反之，若(2)成立．显然(MP)成立，故aMb。

(1)$\Longleftrightarrow$(3)．若aMb，则由(MP)知$\varphi_b\psi_a$是$[a\wedge b, b]$上的恒等映射，因此ψ_a是单射．反之，若ψ_a是单射，由定理1(2)知$\varphi_b\psi_a$是$[a\wedge b, b]$上的恒等映射，即(MP)成立，因此aMb。

同理证(1)$\Longleftrightarrow$(4)．▌

下述推论是显然的．

推论1 在格L中，对任意a，$b\in L$，

(1) 若a，b可比较，则aMb；

(2) 若b为原子，则aMb；

(3) 若aMb，且$a\wedge b\leqslant c$，则$(a\wedge c)Mb$，$aM(b\wedge c)$．

证明留作练习．▌

对偶地有

定理2′ 在格L中，对任意a，$b\in L$，下述条件等价：

(1) aM^*b；

(2) $t\wedge(a\vee b)=(t\wedge a)\vee b$，$\forall t\geqslant b$，$t\in L$．

(3) φ_a：$[b, a\vee b]\to[a\wedge b, a]$是单射；

(4) ψ_b: $[a\wedge b,\ a]\to[b,\ a\vee b]$是满射.

证明留给读者. ▌

推论2 设L是任意格，a，$b\in L$，则下述条件等价：

(1) aMb且bM^*a;

(2) ψ_a: $[a\wedge b, b]\to[a, a\vee b]$与$\varphi_b[a, a\vee b]\to[a\wedge b, b]$是互逆的格同构，这时有$[a\wedge b,\ b]\cong[a,\ a\vee b]$.

证 由定理2及定理2′显然. ▌

推论3 设L是有限长格且满足J-D链条件. 对任意a，$b\in L$,

(1) 若aMb，则$h(a)+h(b)\leqslant h(a\wedge b)+h(a\vee b)$;

(2) 若aM^*b，则$h(a\wedge b)+h(a\vee b)\leqslant h(a)+h(b)$.

证 (1) 设$l(b/a\wedge b)=n$，$a\wedge b=x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_n=b$是连接$a\wedge b$，$b$的极大链(不妨设$n\geqslant 1$). 若$aMb$，则$\psi_a$是单射(定理2)，于是得到一个连接$a$，$a\vee b$的长为$n$的链：

$$a=x_0\vee a<x_1\vee a<\cdots<x_n\vee a=a\vee b.$$

因此
$$h(b)-h(a\wedge b)=l(b/a\wedge b)=n$$
$$\leqslant l(a\vee b/a)=h(a\vee b)-h(a).$$

于是
$$h(a)+h(b)\leqslant h(a\wedge b)+h(a\vee b).$$

同理证(2)成立. ▌

由此可得

定理3 设L是有限长的上半模格，a，$b\in L$，则下述条件等价：

(1) aMb;

(2) bMa;

(3)　$h(a)+h(b)=h(a\wedge b)+h(a\vee b)$.

证　由推论3及§5.1定理3知(1)蕴涵(3).若(3)成立，而(1)不成立，由定理2知ψ_a不是单射，即存在x，$y\in[a\wedge b, b]$，$x\neq y$，使得$x\vee a=y\vee a$. 不妨设$x<y$(否则可取$x\vee y$代替y)，并将其扩充成连接$a\wedge b$，b的有限极大链

$$l_1:\ a\wedge b=x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_n=b,$$

其中$x_i=x$，$x_j=y$，$(0\leqslant i<j\leqslant n)$. 由§5.1推论3知

$$l_2:\ a=x_0\vee a\leqslant x_1\vee a\leqslant\cdots\leqslant x_n\vee a=a\vee b$$

是连接a，$a\vee b$的有限极大链(去掉重复项). 由于$x_i\vee a=x_j\vee a(i\neq j)$，因此$l_2$的长一定小于$l_1$的长. 从而

$$h(a\vee b)-h(a)<h(b)-h(a\wedge b).$$

此与(3)矛盾，故(3)蕴涵(1).

同理证(1)与(2)等价. ▋

利用对偶原则得

定理3′　设L是有限长的下半模格，a，$b\in L$，则下述条件等价：

(1)　aM^*b;

(2)　bM^*a;

(3)　$h(a)+h(b)=h(a\wedge b)+h(a\vee b)$. ▋

上(下)半模格是利用元素的上、下邻元刻划的，这对于离散型的格才有明显的直观意义. 为避免这种限制，下面引入严格上(下)半模格的概念.

设L是一个格. 若对于任意a，$b\in L$，由aMb可推出bMa，则称L是**严格上半模格**.

对偶地可定义**严格下半模格**.

定理4　设L是任意格.

(1)若L是严格上半模格，则L是上半模格；

(2)若L是有限长的，则L是上半模格$\Longleftrightarrow L$是严格上半模格.

证 (1)设L是严格上半模格，a，b覆盖$a\wedge b$，(a，$b\in L$，$a\neq b$)．易证ψ_a：$[a\wedge b, b]\to[a, a\vee b]$是单射，由定理2知$aMb$，于是$bMa$．假定$a\vee b$不是$a$的上邻，则存在$t\in L$，使$a<t<a\vee b$．显然$t\vee b=a\vee b$，，$a\wedge b\leqslant t\wedge b\leqslant b$．由于$a\wedge b\prec b$，必有$t\wedge b=a\wedge b$或$t\wedge b=b$．若$t\wedge b=a\wedge b$，则$\psi_t$：$[t\wedge b, b]\to[t, t\vee b]$是单射，于是$tMb$，从而$bMt$．由定理2知$\psi_b$：$[t\wedge b, t]\to[b, t\vee b]$是单射，此与$t\vee b=a\vee b$，$t\neq a$矛盾．若$t\wedge b=b$，则$b\leqslant t$，于是$t=t\vee b=a\vee b$，与$t<a\vee b$矛盾．综上所述知$a\vee b$是$a$的上邻．同理证$a\vee b$也是$b$的上邻，故$L$是上半模格.

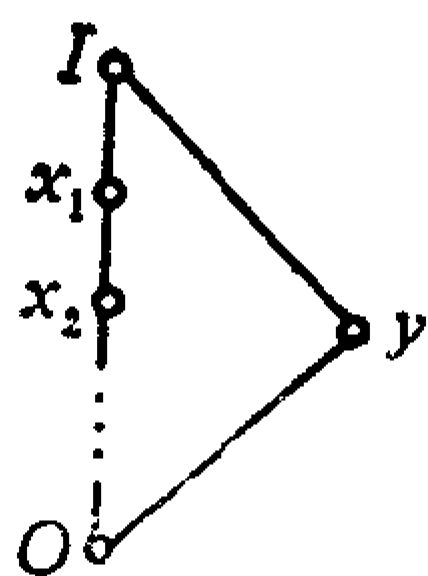


图 5.2.1

(2)设L是有限长格，只须证L是上半模格蕴涵L是严格上半模格．这由定理3直接可得．▌

一般地，上半模格未必是严格上半模格．例如图5.2.1表示的格是上半模格，但非严格上半模格．其中$O<\cdots<x_2<x_1<I$是无限链，除y以外，O没有上邻元．显然x_1My，但是推不出yMx_1.

利用对偶原则得

定理4′ 设L是任意格，

(1)若L是严格下半模格，则L是下半模格；

(2)若L是有限长的，则L是下半模格$\Longleftrightarrow L$是严格下半模格．▌

练　习

1.证明推论1.

2.设$L=L_1L_2$是格的积. 证明:

(1) $(a_1, a_2)M(b_1, b_2)\Longleftrightarrow a_iMb_i(i=1, 2)$;

(2) L是严格上(下)半模格$\Longleftrightarrow L_i$是严格上(下)半模格$(i=1, 2)$.

3.设L是有限长的上半模格, a, $b\in L$. 证明: 若a是原子, 则aMb.

4.不使用对偶原则, 直接证明本节定理2′、定理3′及定理4′.

§5.3　M-独立性

在有O的格L中, 元素列a_1, a_2, $\cdots a_n$ $(n\geqslant 2)$ 称为**M-独立**, 如果对任意$k=1, 2, \cdots, n-1$. 均有

(1) $(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)Ma_{k+1}$,

(2) $(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)\wedge a_{k+1}=O$.

特别地, 当$n=2$时, 也称a_1与a_2M-独立.

显然, 元素列a_1, a_2, $\cdots$, a_nM-独立当且仅当对任意$k=1, 2, \cdots, n-1$, $a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k$与$a_{k+1}$M-独立.

定理1　在有O的格L中,

(1)若$b_1\leqslant b$, $c_1\leqslant c$, 且b与cM-独立, 则b_1与c_1M-独立;

(2)若b与cM-独立, 且a与$b\vee c$M-独立, 则$a\vee b$与cM-独立;

(3)若元素列a_1, a_2, $\cdots$, $a_n(n\geqslant 2)$M-独立, 则其子列

a_{i_1}, a_{i_2}, …, a_{i_k}($1\leqslant i_1<i_2<\cdots i_k\leqslant n$, $k\geqslant 2$)也M-独立.

证 (1)设b与cM-独立，则bMc，且$b\wedge c=O$. 由§5.2推论1知b_1Mc，又因$b_1\leqslant b$，$c_1\leqslant c$，于是$b_1\wedge c\leqslant b\wedge c=O$，从而$b_1Mc_1$，且$b_1\wedge c_1=O$. 故$b_1$，$c_1$M-独立.

(2)设b与cM-独立，a与$b\vee c$ M-独立，则$b\wedge c=O$，$a\wedge(b\vee c)=O$，且bMc，$aM(b\vee c)$. 由§5.2定理2及模不等式知

$$b=b\vee(a\wedge(b\vee c))=(b\vee a)\wedge(b\vee c)$$
$$\geqslant b\vee((b\vee a)\wedge c)\geqslant b,$$

于是$b\vee((a\vee b)\wedge c)=b\vee O=b$. 由§5.2定理2可知

$$\psi_b:\ [b\wedge c,\ c]\to[b,\ b\vee c]$$

是单射，因此$(a\vee b)\wedge c=O$. 显然

$$\psi_a:\ [a\wedge(b\vee c),\ b\vee c]\to[a,\ a\vee b\vee c]$$

也是单射，由此导出

$$\psi_{a\vee b}:\ [(a\vee b)\wedge c,\ c]\to[a\vee b,\ a\vee b\vee c]$$

也是单射. 故$(a\vee b)Mc$，从而$a\vee b$与cM-独立.

(3)由(1)及M-独立之定义，显然. ▌

一般地，M-独立不具有对称性(练习1).

定理2 若L是有限长的上半模格，则下述条件等价：

(1)元素列a_1，a_2，…，a_n($n\geqslant 2$)M-独立；

(2)$a_1,a_2,\cdots$，a_{n-1}M-独立且$a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_{n-1}$与$a_n$M-独立；

(3)$h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n)=h(a_1)+h(a_2)+\cdots+h(a_n)$.

证 由定义知(1)与(2)等价. 利用§5.2定理3及归纳法可证(1)蕴涵(3). 假设(3)成立，由§5.1定理3易证对于任意$x_i\in L$($i=1$, 2, …, r)，总有

$\therefore h(x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_r)\leqslant h(x_1)+h(x_2)+\cdots+h(x_r)$.

特别地，

$$\begin{aligned}h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n)&\leqslant h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_{n-1})+h(a_n)\\&\quad -h((a_1\vee\cdots\vee a_{n-1})\wedge a_n)\\&\leqslant h(a_1)+h(a_2)+\cdots+h(a_n)\\&\quad -h((a_1\vee\cdots\vee a_{n-1})\wedge a_n)\end{aligned}$$

由于

$$h(a_1)+h(a_2)+\cdots+h(a_n)=h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n),$$

故有

$$h((a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_{n-1})\wedge a_n)=0.$$

即 $(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_{n-1})\wedge a_n=O$，由此导出

$$h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n)=h(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_{n-1})+h(a_n).$$

由§5.2定理3知$a_1\vee\cdots\vee a_{n-1}$与$a_n$M-独立．对$n$使用归纳法可证(1)成立．▌

推论1 在有限长的上半模格中，元素列的M-独立是对称的，即若a_1，a_2，…，a_nM-独立，则对任意排列，a_{i_1}，a_{i_2}，…，a_{i_n}仍然M-独立。

证 由定理2显然．▌

推论2 在有限长的上半模格L中，若$p_i(i=1, 2, \cdots, n)$是原子，则下述条件等价：

(1) p_1，p_2，…，p_nM-独立；

(2) $(p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_k)\wedge p_{k+1}=O, \forall k=1,2,\cdots,n-1$；

(3) $h(p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_n)=n$。

证 由§5.2推论1知(1)与(2)等价．由§5.1推论3知(2)与(3)等价．▌

下面引入独立与序列独立的概念。

设L是有O的格，$a_i\in L\ (i=1,\ 2,\cdots,n)$．若对每一个$i$，$(1\leqslant i\leqslant n)$，都有$(a_1\vee\cdots\vee a_{i-1}\vee a_{i+1}\vee\cdots\vee a_n)\wedge a_i=O$，则称$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ **独立**(或为**独立集**)；若对每一个$k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，都有$(a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_k)\wedge a_{k+1}=O$，则称$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$为**序列独立**.

显然独立(或M-独立)一定是序列独立，反之不真(练习3)．独立性是对称的，而序列独立则不然．独立与M-独立是无关的(练习4)．

由推论1与推论2直接可得

推论3 在有限长上半模格中，

(1)M-独立一定独立，从而序列独立；

(2)对于原子元而言，M-独立、独立与序列独立三者彼此等价．∎

设L是有限长格，X是一些原子组成的集合．称X的上确界$\vee X$(一定存在)的维数为X的**秩**，记作$r(X)$．即$r(X)=h(\vee X)$．

定理3 设L是有限长上半模格，

(1)L中任何原子元集合X一定包含有同秩的独立子集；

(2)若原子元集合$\{p_i\mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$与$\{q_j\mid j=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1\}$都是独立集，则存在$q_j(1\leqslant j\leqslant n+1)$，使得$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ q_j$也是独立集.

证 (1)设L的长为m，则X中所包含的独立子集所含原子的个数都不超过m(实际上都不超过X的秩)．取一个含原子个数最多的独立子集$\{p_{i_1},\ p_{i_2},\ \cdots,\ p_{i_r}\}$，易证该子集与$X$同秩。

(2)由推论2知

$$h(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = n < n+1 = h(q_1 \vee \cdots \vee q_{n+1}).$$

因此存在$q_j(1 \leqslant j \leqslant n+1)$，使$q_j \nleqslant p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$. 由§5.1推论3知$p_1 \vee \cdots \vee p_n \prec p_1 \vee \cdots \vee p_n \vee q_j$，于是

$$h(p_1 \vee \cdots \vee p_n \vee q_j) = h(p_1 \vee \cdots \vee p_n) + 1 = n+1.$$

故p_1，p_2，…，p_n，q_j独立. ▌

下面的结果对于由M-独立集生成的子格给出了完全的刻划.

定理4 在有限长的上半模格中，若元素列x_1，x_2，…，x_n M-独立，则由子集$X = \{x_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$生成的子格同构于$X$的幂集格$P(X)$.

证 令$W = \{\sup A \mid A \subseteq X\}$，易证若$A$，$B \subseteq X$，则

$$\sup A \vee \sup B = \sup(A \cup B) \in W,$$

$$\sup(A \cap B) \leqslant \sup A \wedge \sup B.$$

另一方面由§5.1定理3及本节定理2可知

$$h(\sup A \wedge \sup B) \leqslant h(\sup A) + h(\sup B) - h(\sup(A \cup B)) = h(\sup(A \cap B)),$$

于是$\sup A \wedge \sup L \leqslant \sup(A \cap B)$. 从而$\sup A \wedge \sup B = \sup(A \cap B) \in W$. 因此$W$是由$X$生成的子格. 令

$$\varphi: P(X) \longrightarrow W$$

$$A \longmapsto \sup A,$$

则φ是格满同态，并且由于x_1，x_2，…，x_n M-独立. 易证φ是单同态. 故φ为格同构. ▌

练 习

1. 验证：在图5.3.1所示的格L中，元素列p_1，p_2，

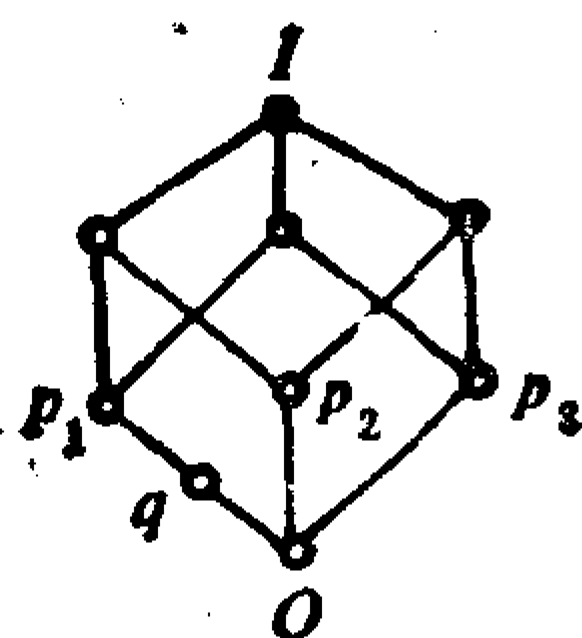


图 5.3.1

p_3M-独立，但是p_2，p_1，p_3不是M-独立.

2.详证本节定理2.

3.验证：图5.3.1中，p_2，p_1，p_3序列独立，但非独立.

4.验证：图5.3.1中，p_2，p_1独立，但非M-独立；p_1，p_2，p_3M-独立，但非独立.

§5.4 模 格

在§3.2中我们给出了模格的定义及其基本性质，本节继续这方面的讨论. 依定义，一个格L称为模格，当且仅当模律成立，即对于任意a，b，$c\in L$，满足

(M) 若$a\leqslant c$，则$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$.

下面给出模格的若干等价条件.

定理1 对于任意格L，下述条件等价：

(1) L是模格；

(2) $a\wedge(b\vee(a\wedge c))=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$，$\forall a, b, c\in L$；

(3) $x=(x\vee a)\wedge b$，$\forall a, b\in L$及$x\in[a\wedge b, b]$；

(4) $y=(y\wedge a)\vee b$，$\forall a, b\in L$及$y\in[b, a\vee b]$；

(5) aMb，$\forall a, b\in L$；

(6) aM^*b，$\forall a, b\in L$；

(7) L不含五元子格N_5(图5.4.1)；

(8) 若$a\wedge c=b\wedge c$, $a\vee c=b\vee c$, 且$a\leqslant b(a, b, c\in L)$,

则$a=b$；.

(9) L 的理想格$\hat{L}$是模格.

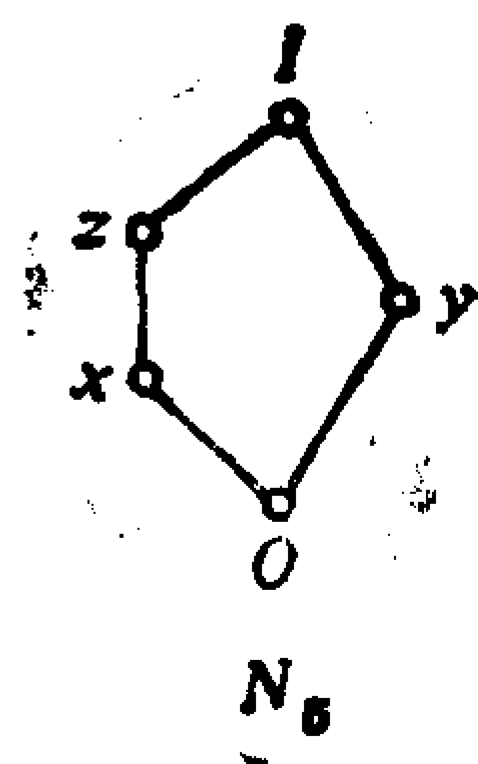


图 5.4.1

证 由模律(M)知(1)蕴涵(2). 反之，若(2)成立，当$a\leqslant c$时则有

$$a\vee(b\wedge c)=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$$
$$=((a\wedge c)\vee b)\wedge c=(a\vee b)\wedge c,$$

即(M)成立. 故(1)与(2)等价. 由§5.2定理2及定理2′知(1)、(3)、(4)、(5)、(6)彼此等价. 由§3.4推论5知(1)与(9)等价，而(7)与(8)等价是显然的. 下面证明(1)与(7)等价. 由§3.2定理6知(1)蕴涵(7). 反之，设(7)成立. 若L不是模格，则存在$a,\ b,\ c\in L$，使得$a\leqslant c$，但$a\vee(b\wedge c)\neq(a\vee b)\wedge c$. 由模不等式(§3.1推论3)知

$$a<c,\ a\vee(b\wedge c)<(a\vee b)\wedge c. \qquad (\alpha)$$

于是有

$$b<c\leqslant a\vee(b\wedge c)<(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee b, \qquad (\beta)$$
$$b\wedge c\leqslant b\leqslant a\vee b. \qquad (\gamma)$$

在(β)中，若$b\wedge c=a\vee(b<c)$，则$a\leqslant b\wedge c\leqslant b$，从而$(a\vee b)\wedge c=b\wedge c$. 代入($\beta$)中则有$b\wedge c<b\wedge c$，矛盾. 故$b\wedge c\neq a\vee(b\wedge c)$. 同理证$(a\vee b)\wedge c\neq a\vee b$. 在($\gamma$)中，$b\wedge c\neq b$，$b\neq a\vee b$. 于是有

$$b\wedge c<a\vee(b\wedge c)<(a\vee b)\wedge c<a\vee b \qquad (\beta')$$
$$b\wedge c<b<a\vee b \qquad (\gamma')$$

并且容易证明

$$b\wedge(a\vee(b\wedge c))=b\wedge c=b\wedge((a\vee b)\wedge c),$$
$$b\vee(a\vee(b\wedge c))=a\vee b=b\vee((a\vee b)\wedge c).$$

故五元子集$\{b,\ a\vee b,\ b\wedge c,\ a\vee(b\wedge c),\ (a\vee b)\wedge c\}$构成

L的一个子格，其示图可由N_5表示，此与(7)矛盾．故L是模格，因此(1)与(7)等价．▌

推论1 设L是模格，则

(1) L是严格上(下)半模格(从而是上(下)半模格)；

(2) L满足Jordan-Dedekind链条件．

证明显然．▌

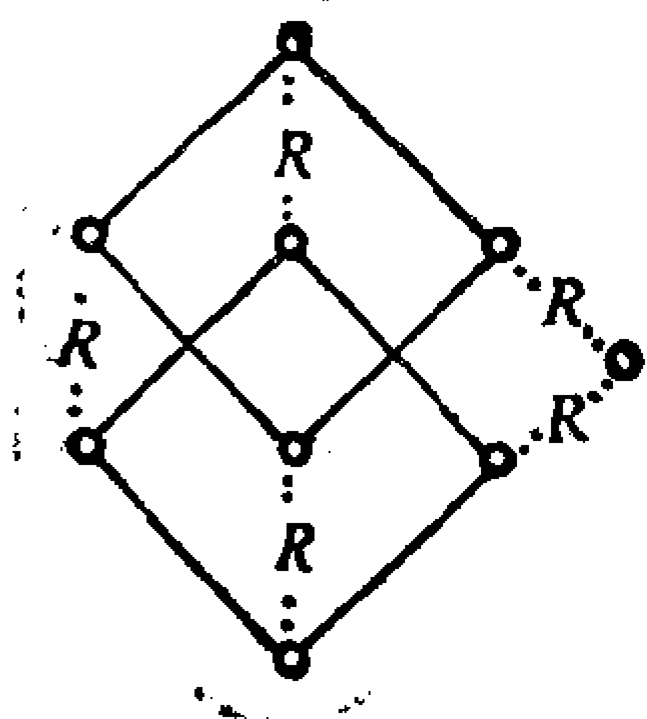


图 5.4.2

图5.4.2给出一个格的例子，它是上半模格，又是下半模格，但不是模格．其中R表示没有极大元和极小元的无限链．

若L是有限长的格，则L是模格等价于L是上、下半模格．

定理2 设L是有限长的格，则下述条件等价：

(1) L是模格；

(2) L是上半模格，又是下半模格；

(3) L满足J-D链条件及维数公式：

$h(a)+h(b)=h(a\wedge b)+h(a\vee b)$，($\forall a, b\in L$)．

证 由推论1知(1)蕴涵(2)．由§5.1定理(3)及对偶原则知(2)蕴涵(3)．设(3)成立，若L不是模格，则L有五元子格N_5(图5.4.1)．因此有x、y、$z\in L$，使$x<z$，并且$x\wedge y=z\wedge y$，$x\vee y=z\vee y$．于是由(3)得

$$h(x)+h(y)=h(x\wedge y)+h(x\vee y)=h(z\wedge y)+h(z\vee y)$$
$$=h(z)+h(y),$$

由此得$h(x)=h(z)$．此与$x<z$矛盾，故L为模格，即(3)蕴涵(1)．▌

现在考虑模格中元素的分配性．这里要用到分配三元组

的概念(§3.8).

定理3 设L是模格，对任意$a,b,c\in L$，下述条件等价：

(1)$(a, b, c)D$;

(2)$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$;

(3)$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;

(4)$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$
$=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$.

证 (1)蕴涵(2)、(3)、(4)显然. 反之，设(2)成立，由模律得

$$(b\vee c)\wedge(b\vee a)=b\vee((b\vee c)\wedge a)$$
$$=b\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=b\vee(a\wedge c).$$

即
$$b\vee(c\wedge a)=(b\vee c)\wedge(b\vee a) \tag{*}$$

由(*)式出发，对偶地可得

$$c\wedge(a\vee b)=(c\wedge a)\vee(c\wedge b) \tag{**}$$

因此，若a, b, c满足(2)，则对它们的次序作一循环置换仍然满足(2)的关系式，显然a, c, b也满足(2)式. 因此对a, c, b作任何循环置换仍满足(2)式. 这样对a,b,c的任何排列均适合(2)的关系式. 对偶地，由(*)出发知对a, b, c的任何排列均适合关系式(3).故$(a, b, c)D$, 即(2)蕴涵(1). 同理，由(3)推出(1). 最后证(4)蕴涵(3). 设(4)成立，由模律得

$$\begin{aligned}a\vee(b\wedge c)&=a\vee(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\\&=a\vee((a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a))\\&=(a\vee b\vee c)\wedge(a\vee b)\wedge(c\vee a)\\&=(a\vee b)\wedge(c\vee a).\end{aligned}$$

即(3)成立. ▌

由定理3直接可得

推论2 在模格L中，对任意$a\in L$，下述条件等价：

(1)a是分配元；

(2)a是标准元；

(3)a是对偶标准元；

(4)映射ψ_a：$x\mapsto x\vee a$是L的格自同态；

(5)映射φ_a：$x\mapsto x\wedge a$是L的格自同态。

证明留给读者。▌

推论3 设L是模格，a，b，$c\in L$，令

$$e=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a),$$

$$f=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a),$$

则 (1) $(a\wedge(b\vee c))\vee(b\wedge(c\vee a))=e$,

$(a\vee(b\wedge c))\wedge(b\vee(c\wedge a))=f$；

(2)若令$a_1=(b\wedge c)\vee(a\wedge(b\vee c))$,

$b_1=(c\wedge a)\vee(b\wedge(c\vee a))$,

$c_1=(a\wedge b)\vee(c\wedge(a\vee b))$,

则

$$a_1\vee b_1=b_1\vee c_1=c_1\vee a_1=e,$$

$$a_1\wedge b_1=b_1\wedge c_1=c_1\wedge a_1=f;$$

并且下述条件等价：

(i) $(a, b, c)D$；

(ii) $a_1=b_1=c_1$；

(iii) $(a_1, b_1, c_1)D$。

证 (1)由模律可得

$$(a\wedge(b\vee c))\vee(b\wedge(c\vee a))$$

$$=((a\wedge(b\vee c))\vee b)\wedge(c\vee a)$$

$$=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)=e$$

同理证另一式也成立.

(2)由模律可证$a_1=((b\wedge c)\vee a)\wedge(b\vee c)$,
$b_1=((c\wedge a)\vee b)\wedge(c\wedge a)$, $c_1=((a\wedge b)\vee c)\wedge(a\vee b)$.
因此

$$
\begin{aligned}
a_1\vee b_1&=(b\wedge c)\vee(a\wedge(b\vee c))\vee(c\wedge a)\vee(b\wedge(c\vee a))\\
&=(a\wedge(b\vee c))\vee(b\wedge(c\vee a))\\
&=((a\wedge(b\vee c))\vee b)\wedge(c\vee a)\\
&=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)=e.\\
a_1\wedge b_1&=((b\wedge c)\vee a)\wedge(b\vee c)\wedge((c\wedge a)\vee b)\wedge(c\vee a)\\
&=((b\wedge c)\vee a)\wedge((c\wedge a)\vee b)\\
&=(b\wedge c)\vee(a\wedge((c\wedge a)\vee b))\\
&=(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\vee(a\wedge b)=f.
\end{aligned}
$$

同理证$b_1\vee c_1=c_1\vee a_1=e$, $b_1\wedge c_1=c_1\wedge a_1=f$.

若(i)成立，由定理3知$e=f$. 由上面的结果得$a_1\leqslant e=f\leqslant b_1$, 同理$b_1\leqslant a_1$. 于是$a_1=b_1$. 类似可证$a_1=c_1$, 即(ii)成立. 由(ii)显然可得(iii). 若(iii)成立，由定理3得

$$
\begin{aligned}
&(a_1\wedge b_1)\vee(b_1\wedge c_1)\vee(c_1\wedge a_1)\\
&=(a_1\vee b_1)\wedge(b_1\vee c_1)\wedge(c_1\vee a_1).
\end{aligned}
$$

由于$a_1\wedge b_1=b_1\wedge c_1=c_1\wedge a_1=f$, $a_1\vee b_1=b_1\vee c_1=c_1\vee a_1=e$, 于是$e=f$. 故$(a, b, c)D$. ▌

利用上述结果，可以对非分配的模格给出完全的刻划.

推论4 设L是模格，则L不是分配格当且仅当L含有五元子格M_5(图5.4.3).

证 充分性由§3.2定理4可得. 若L是模格但不是分配格，则L有元素a, b, c不是分配三元组. 利用推论3中的记号，则易见$\{a_1, b_1, c_1, e, f\}$构成L的一个五元子格，其

示图如图5.4.3. ▌

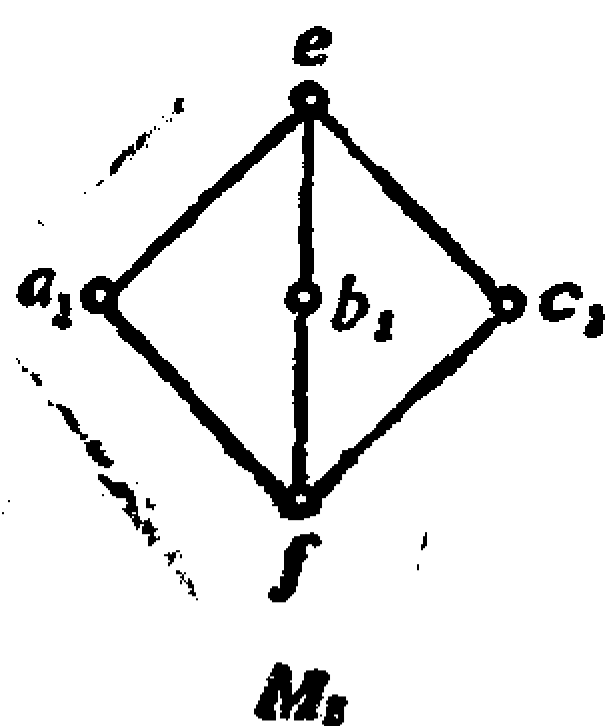


图 5.4.3

练　　习

1. 补证推论2.

2. 举例说明在非模格L中，定理3的结论未必成立.

§5.5 Dedekind转置原则与JHS定理

本节证明模格中两个重要结果，即Dedekind转置原则和JHS定理.

格L的两个区间$[x,y]$与$[x',y']$称为**转置**的(记作$[x,y]\nearrow[x',y']$)，如果有适当的a，$b\in L$，使得这两个区间可分别表成$[a\wedge b,a]$与$[b,a\vee b]$的形式. 区间$[x,y]$与$[x',y']$称为**射影**的(记作$[x,y]\sim[x',y']$)，如果存在有限多个区间$[x,y]$，$[x_1,y_1]$，…，$[x_n,y_n]$，$[x',y']$，使得每相邻两个区间是转置的.

容易证明，区间的射影关系是等价关系(练习1).

定理1 (**Dedekind转置原则**) 在任意模格L中，映射ψ_a：$x\mapsto x\vee a$与φ_b：$y\mapsto y\wedge b$是转置区间$[a\wedge b,b]$与$[a,a\vee b]$间的互逆同构.

证 由§5.4定理1及§5.2推论2直接可得. ▌

推论1 在模格L中，

(1) 射影区间是同构的；

(2) $[a\wedge b,b]$的子区间及$[a,a\vee b]$的子区间分别被ψ_a

与φ_b同构地映射到其转置区间上.

证明留作练习. ▋

在格中，区间$[a, b]$有时也叫做由元素a，$b(a\leqslant b)$构成的**商**，记作b/a. 若b是a的上邻，则称商b/a为**素商**.

定理2 在模格L中，若$a\leqslant a^*$，$b\leqslant b^*(a, a^*, b, b^*\in L)$，则商

$$(a^*\wedge b^*)\vee a/(a^*\wedge b)\vee a 与 (b^*\wedge a^*)\vee b/(b^*\wedge a)\vee b$$

都是商$a^*\wedge b^*/(a^*\wedge b)\vee(b^*\wedge a)$的转置，从而两者射影(见图5.5.1).

证 由于$a\leqslant a^*$，$b\leqslant b^*$，因此$a^*\wedge b\leqslant a^*\wedge b^*$，并且

$$((a^*\wedge b)\vee a)\vee(a^*\wedge b^*)=(a^*\wedge b^*)\vee a,$$

$$\begin{aligned}((a^*\wedge b)\vee a)\wedge(a^*\wedge b^*)&=((a^*\wedge b)\vee a)\wedge b^*\\&=(a^*\wedge b)\vee(a\wedge b^*).\ (\text{模律})\end{aligned}$$

因此 $(a^*\wedge b^*)\vee a/(a^*\wedge b)\vee a$与$a^*\wedge b^*/(a^*\wedge b)\vee(b^*\wedge a)$转置. 同理证

$$(b^*\wedge a^*)\vee b/(b^*\wedge a)\vee b 与 a^*\wedge b^*/(a^*\wedge b)\vee(b^*\wedge a)$$

转置，从而

$$(a^*\wedge b^*)\vee a/(a^*\wedge b)\vee a 与 (b^*\wedge a^*)\vee b/(b^*\wedge a)\vee b$$

射影. ▋

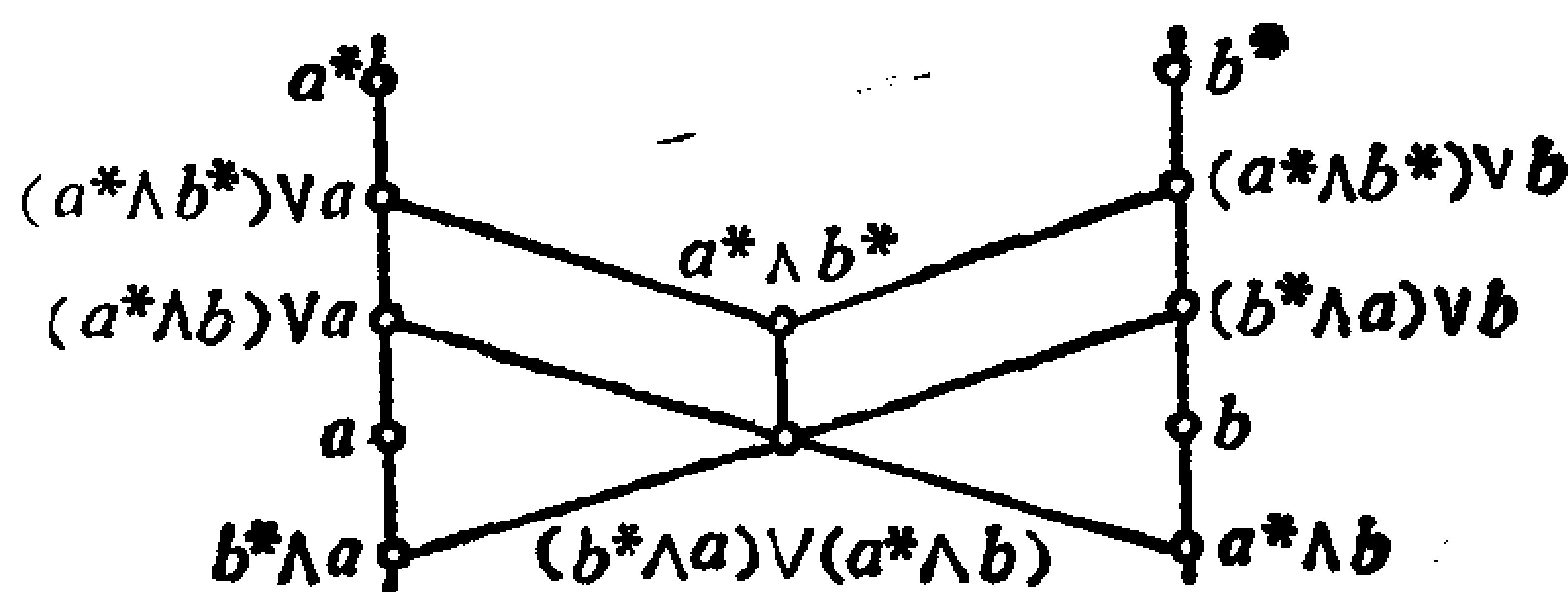


图 5.5.1

利用上述结果可以证明，在模格中，连接两个给定元素

的所有有限链都有等长的同构加细，这就是所谓的Jordan-Hölder-Schreier定理(简称JHS定理)。

定理3 (JHS**定理**)在模格L中，连接给定元a，$b(a\leqslant)b$的任意两个有限链

(α) $a=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_m=b$,

(β) $a=d_0<d_1<d_2<\cdots<d_n=b$,

都有等长的同构加细，即存在有限链

(α') $a=c_0'<c_1'<c_2'<\cdots<c_r'=b$,

(β') $a=d_0'<d_1'<d_2'<\cdots<d_r'=b$,

使得$\{c_i\}\subseteq\{c_j'\}$，$\{d_i\}\subseteq\{d_j'\}$，并且c_i'/c_{i-1}'与d_j'/d_{j-1}' $(i,j=1, 2, \cdots, r)$依适当的次序相互射影(从而同构)。

证 令$c_{ij}=(c_i\wedge d_j)\vee c_{i-1}(i=1, 2, \cdots, m; j=0, 1, 2, \cdots, n)$，$d_{ji}=(d_j\wedge c_i)\vee d_{j-1}(i=0, 1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$。由律模知

$$c_{ij}=c_i\wedge(d_j\vee c_{i-1}),\quad d_{ji}=d_j\wedge(c_i\vee d_{j-1}),$$

并且有 $c_{i-1}=c_{i0}\leqslant c_{i1}\leqslant c_{i2}\leqslant\cdots\leqslant c_{in}=c_i$,

$$d_{j-1}=d_{j0}\leqslant d_{j1}\leqslant d_{j2}\leqslant\cdots\leqslant d_{jm}=d_j.$$

将$\{c_{ij}\}$及$\{d_{ji}\}$分别插入(α)，(β)之中，即得到它们的加细

(α_0) $a=c_0=c_{10}\leqslant c_{11}\leqslant\cdots\leqslant c_{1n}=c_1=c_{20}\leqslant c_{21}\leqslant\cdots\leqslant$
$=c_m=b$,

(β_0) $a=d_0=d_{10}\leqslant d_{11}\leqslant\cdots\leqslant d_{1m}=d_1=d_{20}\leqslant d_{21}\leqslant\cdots$
$d_{nm}=d_n=$.

容易证明以下两点：

(1) c_{ij}/c_{ij-1}与d_j/d_{ji-1}是射影的，这由定理2直接得到。

(2) $c_{ij}=c_{ij-1}\Longleftrightarrow d_{ij}=d_{ji-1}$

事实上，若$c_{ij}=c_{ij-1}$，则

$$c_i\wedge(d_j\vee c_{i-1})=c_i\wedge(d_{j-1}\vee c_{i-1}).$$

两边与d_j作交，即

$$c_i\wedge d_j=c_i\wedge(d_j\wedge(d_{j-1}\vee c_{i-1}))=c_i\wedge d_{j-1},$$

由于 $d_{j-1}\leqslant d_{j\,i-1}=d_j\wedge(c_{i-1}\vee d_{j-1})\leqslant c_{i-1}\vee d_{j-1}\leqslant c_i\vee d_{j-1}$，利用模律得

$$\begin{aligned}d_{ji}&=(c_i\wedge d_j)\vee d_{j-1}=(c_i\wedge d_{ji-1})\vee d_{j-1}\\&=(c_i\vee d_{j-1})\wedge d_{j\,i-1}=d_{ji-1}.\end{aligned}$$

同理，若$d_{ji}=d_{j\,i-1}$，可证$c_{ij}=c_{ij-1}$.

由(1)，(2)可知，在(α_0)，(β_0)中去掉重复项后就得到两个等长的有限链

(α') $a=c_0'<c_1'<c_2'<\cdots<c_r'=b$,

(β') $a=d_0'<d_1'<d_2'<\cdots<d_r'=b$.

它们分别是(α)，(β)的加细，并且依照适当的次序使得c_i'/c_{i-1}'与d_j'/d_{j-1}'射影. ▮

利用Dedekind转置原则可得下述

定理4 在模格L内，由区间$[u\wedge v, u]=U$及$[u\wedge v, v]=V(u, v\in L)$生成的子格同构于基数积$UV$.

证 令$W=\{x\vee y\,|\,x\in U, y\in V\}$. 若$a$，$b\in W$，不妨设$a=x_1\vee y_1$，$b=x_2\vee y_2$，$x_i\in U$，$y_i\in V(i=1, 2)$. 显然$a\vee b=(x_1\vee x_2)\vee(y_1\vee y_2)\in W$. 为证$a\wedge b\in W$，只需注意(利用模律)

$$x\vee y=(x\vee v)\wedge(y\vee u),\quad\forall x\in U,\ y\in V.$$

于是再由定理2得

$$\begin{aligned}a\wedge b&=(x_1\vee y_1)\wedge(x_2\vee y_2)\\&=(x_1\vee v)\wedge(y_1\vee u)\wedge(x_2\vee v)\wedge(y_2\vee u)\end{aligned}$$

$$=((x_1\wedge x_2)\vee v)\wedge((y_1\wedge y_2)\vee u)$$
$$=(x_1\wedge x_2)\vee(y_1\wedge y_2)\in W.$$

因此W是由U，V生成的子格.

令φ：$(x,\ y)\mapsto x\vee y$，则φ是UV到W上的满射．若有$x_1\vee y_1=x_2\vee y_2$，$x_i\in U$，$y_i\in V\ (i=1,\ 2)$，则

$$(x_1\vee y_1)\wedge u=(x_1\vee v)\wedge(y_1\vee u)\wedge u=(x_1\vee v)\wedge u=x_1,$$

同理$(x_2\vee y_2)\wedge u=x_2$，因此$x_1=x_2$．类似可证$y_1=y_2$，故$\varphi$是单射．若$d_1=(x_1,\ y_1)$，$d_2=(x_2,\ y_2)\ (x_i\in U,\ y_i\in V)$，则

$$d_1\vee d_2=(x_1\vee x_2,\ y_1\vee y_2),\quad d_1\wedge d_2=(x_1\wedge x_2,\ y_1\wedge y_2).$$

于是 $$\varphi(d_1\vee d_2)=(x_1\vee x_2)\vee(y_1\vee y_2)$$
$$=(x_1\vee y_1)\vee(x_2\vee y_2)=\varphi(d_1)\vee\varphi(d_2).$$

由定理2

$$\varphi(d_1\wedge d_2)=(x_1\wedge x_2)\vee(y_1\wedge y_2)$$
$$=((x_1\wedge x_2)\vee v)\wedge((y_1\wedge y_2)\vee u)$$
$$=(x_1\vee v)\wedge(x_2\vee v)\wedge(y_1\vee u)\wedge(y_2\vee u)$$
$$=((x_1\vee v)\wedge(y_1\vee u))\wedge((x_2\vee v)\wedge(y_2\vee u))$$
$$=(x_1\vee y_1)\wedge(x_2\vee y_2)=\varphi(d_1)\wedge\varphi(d_2).$$

故φ是格同构．▌

推论2 在有O的模格L中，如果$(a\vee c)\wedge(b\vee d)=O$，$(a,\ b,\ c,\ d\in L)$，则$(a\vee b)\wedge(c\vee d)=(a\wedge c)\vee(b\wedge d)$.

证 令$a\vee c=u$，$b\vee d=v$，则$u\wedge v=O$，且a，$c\in[u\wedge v,\ u]$，b，$d\in[u\wedge v,\ v]$．由定理4知

$$(a\vee b)\wedge(c\vee d)=(a\wedge c)\vee(b\wedge d).$$ ▌

下面我们把独立、序列独立的概念(§5.3)推广到任意格上.

设L是任意格，a，$x_i\in L(i=1, 2, \cdots, n)$。若对每个$i(1\leqslant i\leqslant n)$，总有$(x_1\vee\cdots\vee x_{i-1}\vee x_{i+1}\vee\cdots\vee x_n)\wedge x_i=$则称$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_n$**在$a$上独立**；若对每一个$i(i=1, 2, \cdots, n-1)$，总有$(x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_i)\wedge x_{i+1}=a$，则称$x_1$，$x_2$，$\cdots$ x_n**在a上序列独立**.

显然，当$a=O$时，此即§5.3给出的定义.

推论3 在模格L中，若x_1，x_2，$\cdots$，x_n在a上序列独立，则由区间$X_i=[a, x_i](i=1, 2, \cdots, n)$生成的子格同构于基数积$\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$.

证明留给读者(对n使用归纳法). ▮

定理5 设L是模格，x_i，$a\in L(i=1, 2, \cdots, n)$，则下述条件等价：

(1)x_1，x_2，$\cdots$，x_n在a上独立；

(2)x_1，x_2，$\cdots$，x_n在a上序列独立；

(3)$\{x_i \mid i=1, 2, \cdots, n\}$的任意$k$元子集$x_{i_1}$，$x_{i_2}$，$\cdots$，$x_{i_k}(2\leqslant k\leqslant n)$在$a$上独立.

证 (1)⇒(2)及(3)⇒(1)显然. 下证(2)⇒(3). 设x_1，x_2，$\cdots$，x_n在a上序列独立. 只须证明对$\{x_i\}$的任意k元排列x_{i_1}，x_{i_2}，$\cdots$，$x_{i_k}(2\leqslant k\leqslant n)$，总有

$$(x_{i_1}\vee x_{i_2}\vee\cdots\vee x_{i_{k-1}})\wedge x_{i_k}=a.$$

对k使用归纳法. 当$k=2$时，不妨设$i_1<i_2$. 由(2)知

$$(x_1\vee\cdots\vee x_{i_1}\vee\cdots\vee x_{i_2-1})\wedge x_{i_2}=a,$$

并且易见$a\leqslant x_i(\forall i=1, 2, \cdots, n)$，于是

$$a\leqslant x_{i_1}\wedge x_{i_2}\leqslant(x_1\vee\cdots\vee x_{i_1}\vee\cdots\vee x_{i_2-1})\wedge x_{i_2}=a,$$

因此$x_{i_1}\wedge x_{i_2}=a$. 设$k>2$，并且假定对于$k-1$结论已经成

立．令$m=\max\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$．若$i_k=m$，则同上可证

$$(x_{i_1}\vee x_{i_2}\vee\cdots\vee x_{i_{k-1}})\wedge x_{i_k}=a.$$

若$i_k\neq m$，不妨设$i_{k-1}=m$，则

$$(x_{i_1}\vee\cdots\vee x_{i_{k-2}}\vee x_{i_k})\wedge x_{i_{k-1}}=a.$$

由吸收律得

$$(x_{i_1}\vee\cdots\vee x_{i_{k-2}}\vee x_{i_k})\wedge(x_{i_{k-1}}\vee(x_{i_{k-1}}\wedge x_{i_k}))=a.$$

应用推论 2（在子格$[a)$上考虑）及归纳假设，

$$\begin{aligned}&(x_{i_1}\vee\cdots\vee x_{i_{k-2}}\vee x_{i_{k-1}})\wedge x_{i_k}\\&=(x_{i_1}\vee\cdots\vee x_{i_{k-2}}\vee x_{i_{k-1}})\wedge(x_{i_k}\vee(x_{i_{k-1}}\wedge x_{i_k}))\\&=((x_{i_1}\vee\cdots\vee x_{i_{k-2}})\wedge x_{i_k})\vee(x_{i_{k-1}}\wedge x_{i_k})\\&=a\vee a=a,\end{aligned}$$

于是(3)成立．∎

下述推论是显然的．

推论4 设L是有O的模格，$x_i\in L(i=1, 2, \cdots, n)$，则下述条件等价：

(1) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ M-独立；

(2) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 序列独立；

(3) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 独立．∎

练　习

1．证明：格中区间的射影关系是等价关系．

2．补证推论 1 与推论 3．

3．设L是上(下)半模格．$x, y, a, b\in L$．若$a\prec b$，$x\leqslant y$，且Γ：$x=z_0\prec z_1\prec\cdots\prec z_n=y$是连接$x$，$y$的任一有限极大链．证明：诸商$z_i/z_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$（称为$\Gamma$的组成商）中与素商$b/a$射影的个数与$\Gamma$的选择无关．

4.在格L中，给定两个有限链

$$(\alpha) \quad a=c_0<c_1<\cdots<c_m=b,$$

$$(\beta) \quad a=d_0<d_1<\cdots<d_n=b.$$

令$u_{ij}=c_i\wedge d_j$，$v_{ij}=c_i\vee d_j(i=0, 1,2,\cdots, m; j=0, 1, 2, \cdots, n)$. 证明：

(1)任意多个u_{ij}之并总可表为形式：

$$u_{i_1j_1}\vee u_{i_2j_2}\vee\cdots\vee u_{i_rj_r},$$

其中$i_1>i_2>\cdots>i_r$，$j_1<j_2<\cdots<j_r$

(2)若L是模格，则对具有性质

$$i_1>i_2>\cdots>i_r, \quad j_1<j_2<\cdots<j_r$$

的下标，恒有

$$u_{i_1j_1}\vee u_{i_2j_2}\vee\cdots\vee u_{i_rj_r}=v_{i_10}\wedge v_{i_2j_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_rj_{r-1}}\wedge v_{0j_r},$$

$$v_{i_1j_1}\wedge v_{i_2j_2}\wedge\cdots\wedge v_{i_rj_r}=u_{mj_1}\vee u_{i_1j_2}\vee\cdots\vee u_{i_{r-1}j_r}\vee u_{i_rn},$$

由此证明：由链(α)，(β)生成的子格是有限分配格.

(3)利用上述结果证明JHS定理.

5.利用JHS定理证明§5.4推论1(2).

6.设L是有补模格，a，b，$x\in L$. 证明：若$a\leqslant b$，则存在a在b内的一个相对补元y，使得$y\wedge a=O$，$y\vee a=b$且$(x\vee y)\wedge(x\vee a)=x$.（此结果称为Von Neumann-Halperin引理）.

§5.6 元素的既约分解

设a是格L的一个元素. 若对任意b，$c\in L$，由$a=b\vee c$可推出$a=b$或$a=c$，则称a是$\vee$-**既约元**(简称**既约元**). 若L有零元O，且对任意两独立元b，$c\in L$(即$b\wedge c=O$)，由$a=$

$b\vee c$可推出$a=b$或$a=c$，则称a是$\vee$-**直既约元**(简称**直既约元**)．

对偶地可定义$\wedge$-**既约元**和$\wedge$-**直既约元**．

显然既约元一定是直既约元；零元及原子元一定是既约元(直既约元)．

定理1 设a是格L的非零既约元，则

(1)a至多有一个下邻元；

(2)若L满足极大条件，则a恰有一个下邻元．

证 (1)若$b\neq c$都是a的下邻元，则必有$a=b\vee c$，与a是既约元矛盾．

(2)若L满足极大条件，令$T=\{x\mid x\in L,\ x<a\}$．显然$T\neq\varnothing$，因此T中有极大元b．易证b是a的下邻元．由(1)知b是a的唯一的下邻元．∎

在格L中，若元素a可表为若干$\vee$-既约元$x_i(i=1,2,\cdots,r)$之并，即$a=x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_r$，则称此式是$a$的一个$\vee$-**既约分解**(简称**既约分解**)．若上述分解式中每一个x_i不能省去(即$\forall i$，$\bigvee_{j\neq i}x_j<a$)，则称该既约分解是**不可缩**的．

定理2 设L是满足极小条件的格，则

(1)L中任意非零元a至少含有一个原子；

(2)L中任意元a都有一个$\vee$-既约分解．

证 (1)仿定理1(2)的证明．

(2)设$a\in L$．若a本身是$\vee$-既约元，则结论成立．否则，可设$a=a_1\vee b_1$，且$a_1<a$，$b_1<a(a_1,\ b_1\in L)$．若a_1，b_1均有$\vee$-既约分解，则a亦然．因此若a无$\vee$-既约分解，则a_1，b_1中至少有一个无$\vee$-既约分解，比如a_1，即a_1无$\vee$-既约分解，且$a_1<a$．同理可推有$a_2<a_1$，a_2亦无$\vee$-既约分解．$\cdots$，

如此继续下去，得出一列无$\vee$-既约分解的元素$a_i(i=1, 2, \cdots)$，使得$a>a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots$，这同$L$满足极小条件的假设矛盾．故$a$有$\vee$-既约分解．▌

在模格中，一个元素的不可缩$\vee$-既约分解具有可换性和单值性．

定理3 在模格L中，设元素a有两个$\vee$-既约分解：

$$a=x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_r=x_1^*\vee x_2^*\vee\cdots\vee x_s^*$$

(1)对任意$x_i(1\leqslant i\leqslant r)$，必定存在某个$x_j^*(1\leqslant j\leqslant s)$，使得

$$a=x_1\vee\cdots\vee x_{i-1}\vee x_j^*\vee x_{i+1}\vee\cdots\vee x_r.$$

(2)若a的两个给定的$\vee$-既约分解都是不可缩的，则$r=s$.

证 (1)令$y=x_1\vee\cdots\vee x_{i-1}\vee x_{i+1}\vee\cdots\vee x_r$，$z_j=y\vee x_j^*(j=1,2,\cdots,s)$．显然$a=y\vee x_i$，$y\leqslant z_j\leqslant a$，$x_j^*\leqslant z_j(j=1,2,\cdots,s)$．因此

$$a=z_1\vee z_2\vee\cdots\vee z_s.$$

由Dedekind转置原则知区间$[y,x_i\vee y]$与$[x_i\wedge y,x_i]$同构．x_i是L中的$\vee$-既约元，在区间$[x_i\wedge y,x_i]$中亦然．因此a在区间$[y,x_i\vee y]=[y,a]$中也是$\vee$-既约元．故存在某一z_j，使得

$$a=z_j=y\vee x_j^*=x_1\vee\cdots\vee x_{i-1}\vee x_j^*\vee x_{i+1}\vee\cdots\vee x_r$$

(2)设a的两个给定的$\vee$-既约分解都是不可缩的．反复使用(1)的结果，则a可用r个x_j^*的并表示．由于$a=x_1^*\vee\cdots\vee x_s^*$是不可缩的，因此必有$s\leqslant r$．同理有$r\leqslant s$，故$r=s$．▌

在有O的格L中，若元素a可表示成若干独立的$\vee$-直既约元$x_i(i=1,2,\cdots,r)$之并，即

$$a=x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_r,$$

则称该式是a的一个$\vee$-**直既约分解**（简称**直既约分解**）

定理4 在有限长的模格L中，

(1) 任意元素都有直既约分解.

(2) 若$a\in L$有两个直既约分解：

$$a=b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r=c_1\vee c_2\vee\cdots\vee c_s,$$

则存在适当的b_i与c_j，使得a有直既约分解：

$$a=b_1\vee\cdots\vee b_{i-1}\vee c_j\vee b_{i+1}\vee\cdots\vee b_r$$
$$=c_1\vee\cdots\vee c_{j-1}\vee b_i\vee c_{j+1}\vee\cdots\vee c_s.$$

(3) 若(2)中元素a的两个给定的直既约分解都是不可缩的，则$r=s$，并且适当调整下标后，使得对所有的i $(1\leqslant i\leqslant r)$，可用$c_i$代替$b_i$得到$a$的直既约分解：

$$a=b_1\vee\cdots\vee b_{i-1}\vee c_i\vee b_{i+1}\vee\cdots\vee b_r.$$

证 (1) 对$a\in L$的维数$h(a)$使用归纳法．若$h(a)=0$或1，则a本身是直既约元，结论成立．设$h(a)=n\geqslant 2$，并且假定当$h(a)\leqslant n-1$时结论已经成立．若a是直既约元，则结论自明．若a不是直既约元，则存在$b,c\in L$，$b\wedge c=O$，$b\neq a,c\neq a$，但是$a=b\vee c$．显然$h(b)<h(a)$，$h(c)<h(a)$．由归纳假设b,c皆有直既约分解，故a也有直既约分解．

(2) 当$h(a)=0$或1时，结论显然成立．设$h(a)=n$，并且假定当$h(a)\leqslant n-1$时结论已经成立$(n\geqslant 2)$．令

$$\bar b_i=b_1\vee\cdots\vee b_{i-1}\vee b_{i+1}\vee\cdots\vee b_r.$$
$$\bar c_j=c_1\vee\cdots\vee c_{j-1}\vee c_{j+1}\vee\cdots\vee c_s.$$
$$b_{ij}=b_i\wedge(c_j\vee\bar b_i),\qquad c_{ji}=c_j\wedge(b_i\vee\bar c_j)$$

$(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$．不妨设$b_1\neq O$，又令

$$d=c_{11}\vee c_{21}\vee\cdots\vee c_{s1}\tag{I}$$

显然$d\leqslant a$，注意到$i\neq j$时有$c_i\leqslant \bar{c}_j\leqslant b_1\vee\bar{c}_j$．由模律可知

$$
\begin{aligned}
d=&(c_1\wedge(b_1\vee\bar{c}))\vee(c_2\wedge(b_1\vee\bar{c}_2))\vee\cdots\\
&\vee(c_s\wedge(b_1\vee\bar{c}_s))\\
=&((c_1\vee c_2)\wedge(b_1\vee\bar{c}_1)\wedge(b_1\vee\bar{c}_2))\vee\cdots\\
&\vee(c_s\wedge(b_1\vee\bar{c}_s))\\
=&\cdots=(c_1\vee c_2\vee\cdots\vee c_s)\wedge(b_1\vee\bar{c}_1)\wedge(b_1\vee\bar{c}_2)\wedge\cdots\\
&\wedge(b_1\vee\bar{c}_s)\\
=&(b_1\vee\bar{c}_1)\wedge(b_1\vee\bar{c}_2)\wedge\cdots\wedge(b_1\vee\bar{c}_s)
\end{aligned}
$$

因此$b_1\leqslant d$．于是有

$$d=b_1\vee(\bar{b}_1\wedge d) \qquad (\text{II})$$

易见c_{11}，c_{21}，…，c_{s1}独立，b_1，$\bar{b}_1\wedge d$独立，从而在（I）、（II）两式中分别对c_{j1}及$\bar{b}_1\wedge d$作直既约分解就可得到d的两个直既约分解．若$d<a$，由归纳假设，存在某c_{j1}的一个直既约分解项e_1可以代换（II）中的b_1，即

$$d=e_1\vee(\bar{b}_1\wedge d) \qquad (\text{III})$$

且$e_1\wedge(\bar{b}_1\wedge d)=O$．不妨设$e_1$是$c_{11}$的直既约分解项，即$c_{11}=e_1\vee e_2$，$e_1\wedge e_2=O$，且$e_1$是非零直既约元，则由$b_1\leqslant d$及（III）知

$$a=d\vee\bar{b}_1=e_1\vee\bar{b}_1 \qquad (\text{IV})$$

因此$c_1=c_1\wedge a=(c_1\wedge\bar{b}_1)\vee e_1$．由于$(c_1\wedge\bar{b}_1)\wedge e_1=c_1\wedge\bar{b}_1\wedge e_1\wedge d=O$，$e_1\neq O$，且$c_1$是直既约元，因此推出$e_1=c_1$．由（IV）得$a=c_1\vee\bar{b}_1$．易见$c_1=c_{11}\leqslant b_1\vee\bar{c}_1$，于是$a=c_1\vee\bar{c}_1\leqslant b_1\vee\bar{c}_1\leqslant a$，故$a=b_1\vee\bar{c}_1$．即当$d<a$时结论成立．若$d=a$，由维数公式易证$c_{j1}=c_j\leqslant b_1\vee\bar{c}_j$，$a=c_j\vee\bar{c}_j\leqslant b_1\vee\bar{c}_j\leqslant a$，从而$a=b_1\vee\bar{c}_j(\forall j=1,2,\cdots,s)$．不妨设$c_1\neq O$，若$a=c_1\vee\bar{b}_1$，则结论成立．若$a\neq c_1\vee\bar{b}_1$，则必有

$$d' = b_{11} \vee b_{21} \vee \cdots \vee b_{r1} < a.$$

(否则，仿$d=a$情形推出$a=c_1 \vee b_i (\forall i)$，矛盾．)这时类似$d<a$的情形可知结论也成立．由维数公式易证经上述代换后得到a的两个分解式仍是直既约分解．

(3)对b_i的个数r使用归纳法．当$r=1$时，结论显然．设b_i的个数小于r时($r>1$)结论已经成立，则对r的情形，由(2)知存在适当b_i，c_j(比如b_1，c_1)，使得a有直既约分解：

$$a = c_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_r = b_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_s \qquad (\text{V})$$

令$b_i^* = b_1 \vee b_i$，$c_j^* = b_1 \vee c_j$ $(i=2,3,\cdots,r; j=2,3,\cdots,s)$，则$a$在区间子格$[b_1,a]$中有不可缩分解式：

$$a = b_2^* \vee b_3^* \vee \cdots \vee b_r^* = c_2^* \vee c_3^* \vee \cdots \vee c_s^* \qquad (\text{VI})$$

显然$[b_1,a]$也是有限长模格，由维数公式易证b_2^*，b_3^*，$\cdots$，b_r^*及$c_2^*,c_3^*,\cdots,c_s^*$分别在b_1上独立(从而在$[b_1,a]$中独立)．若有c，$d\in[b_1,a]$，$c\wedge d=b_1$且$b_i^*=c\vee d$ $(2\leqslant i\leqslant r)$，则由模律得

$$c = c\wedge b_i^* = b_1 \vee (b_i \wedge c), \quad d = b_1 \vee (b_i \wedge d).$$

由此推得：$b_i=(b_i\wedge c)\vee(b_i\wedge d)$．显然

$$(b_i\wedge c)\wedge(b_i\wedge d) = b_i\wedge b_1 = O,$$

而b_i是直既约元，因此$b_i\wedge c=b_i$或$b_i\wedge d=b_i$，从而$c=b_i^*$或$d=b_i^*$，即$b_i^*(i=2,3,\cdots,r)$是$[b_1,a]$中的直既约元，同理证$c_j^*(j=2,3,\cdots,s)$也是$[b_1,a]$中的直既约元．由归纳假设，在(VI)中有$r-1=s-1$，即$r=s$，当适当排列下标后，对任意的$2\leqslant i\leqslant r$，有a在$[b_1,a]$中的直既约分解：

$$a = b_2^* \vee \cdots \vee b_{i-1}^* \vee c_i^* \vee b_{i+1}^* \vee \cdots \vee b_r^*.$$

结合(V)式可证a在L中有直既约分解：

$$a = b_1 \vee b_2 \vee \cdots \vee b_{i-1} \vee c_i \vee b_{i+1} \vee \cdots \vee b_r.$$

$(i=1,2,\cdots,r)$. ■

练 习

1. 证明：

(1) 零元和原子元都是既约元；

(2) 在线性序集中，每一个元素都是既约元。

2. 举例说明直既约元未必是既约元。

3. 举例说明在定理2中，"L满足极小条件"的要求不是必须的。

4. 证明：格L中元素a的直既约分解$a=x_1\vee\cdots\vee x_r$是不可缩的$\Longleftrightarrow a=O$，$r=1$或$a\neq O$，$x_i\neq O(i=1,2,\cdots,r)$。

5. 证明：在分段有补格中，非零元素a是$\vee$-既约元$\Longleftrightarrow a$是原子。

第六章　有补模格与几何格

本章首先讨论相对有补格及有补模格的基本性质(§6.1，§6.2)，研究有补模格中的透视性(§6.3)，进而讨论几何格、模几何格和射影几何(§6.4，§6.5)，最后给出两类特殊的几何格——分类格和代数闭子域格(§6.6)．

§6.1　相对有补格

在§3.2中我们定义了有补格、相对有补格及分段有补格，并且讨论了它们的简单性质．有O的相对有补格一定是分段有补格；有O，I的分段有补格一定是有补格．下面进一步讨论相对有补格与分段有补格的有关性质．

定理1　设L是分段有补格，$O\neq a\in L$，则下述条件等价：

(1) a是$\vee$-既约元；

(2) a是$\vee$-直既约元；

(3) a是原子．

证　(1)⇒(2)及(3)⇒(1)显然．若a不是原子，且$a\neq O$，则存在$b\in L$，$O<b<a$．由于L是分段有补格，因此b在a内有补元$b'\in L$，使$b\wedge b'=O$，$b\vee b'=a$．显然$b\neq a$，$b'\neq a$，因此a不是$\vee$-直既约元．故(2)⇒(3)成立．∎

推论1　在满足极小条件的分段有补格中(特别，在有限

长的相对有补格中)，任意非零元素都可表示成一些原子的并.

证 由定理1及§5.6定理2直接得证. ▌

对于有限长的上半模格，上述性质完全刻划了相对有补格和分段有补格.

定理2 设L是有限长的上半模格，则

(1)L是有补格$\Longleftrightarrow I$是原子的并.

(2)下述条件等价：

i)L是相对有补格；

ii)L是分段有补格；

iii)L中任意非零元是原子的并.

证 (1)L显然是完备格. 若L是有补格，令a表示全体原子的并，a'是a的补元，则a'不再含任何原子. 由§5.6定理2知$a'=O$，于是$I=a$是原子的并. 由§5.3定理3及推论2知I可表为有限多个独立的原子之并. 反之，若I是原子的并，不妨设

$$I=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m,$$

p_1，p_2，…，p_m是独立的原子元. 任取$a\in L$，若$a=I$，则a有补元O. 设$a\neq I$，则存在p_{i_1}使$a\prec a\vee p_{i_1}$ (§5.1推论3). 若$a\vee p_{i_1}\neq I$，则存在p_{i_2}使$a\vee p_{i_1}\prec a\vee p_{i_1}\vee p_{i_2}$，…，这样可以找到$r$个原子$p_{i_1}$，$p_{i_2}$，…，$p_{i_r}(1\leqslant r\leqslant m)$，使得

$$a\prec a\vee p_{i_1}\prec a\vee p_{i_1}\vee p_{i_2}\prec\cdots\prec a\vee p_{i_1}\vee\cdots\vee p_{i_r}=I.$$

令$p_{i_1}\vee p_{i_2}\vee\cdots\vee p_{i_r}=b$，则$a\vee b=I$，且易证$h(a\vee b)=h(a)+r$，$h(b)=r$(§5.1推论3). 再由§5.1定理3得

$$h(a\wedge b)\leqslant h(a)+h(b)-h(a\vee b)=0,$$

因此$a\wedge b=O$，即b是a的补元. 故L是有补格.

(2) i)⇒ii)⇒iii) 显然．下证 iii)⇒i)．设 iii)成立，a，$b\in L$，$a\leqslant b$．任取$x\in[a, b]$，则x，b是一些原子的并，由(1)知区间子格$[O, x]$与$[O, b]$是有补格．令a'是a在x内的补元，x'是x在b内的补元，$y=a\vee x'$，则$x\wedge x'=O$，$x\vee x'=b$，并且易证 $y\vee x=b$，$a\wedge x'=O$，$a\leqslant y\wedge x$．由(1)的证明过程可知$h(x\vee x')=h(b)=h(x)+h(x')$．而$h(y)=h(a\vee x')\leqslant h(a)+h(x')$，因此

$$h(y\wedge x)\leqslant h(y)+h(x)-h(y\vee x)=h(y)+h(x)-h(b)$$
$$\leqslant h(a)+h(x')+h(x)-(h(x)+h(x'))=h(a),$$

从而$y\wedge x=a$．故y是x在$[a, b]$内的相对补元，即L是相对有补格．▮

在分段有补格中，标准理想和格同余关系存在一一对应(§3.5定理5)．特别地，这对于有限长的相对有补格为真．

定理3 设L是有限长的相对有补格，θ是L的格同余关系，令

$$K(\theta)=\{x \mid x\in L,\ x\equiv O(\mathrm{mod}\ \theta)\},$$
$$D(\theta)=\{y \mid y\in L,\ y\equiv I(\mathrm{mod}\ \theta)\},$$

则 (1) $K(\theta)$是L的标准理想，$D(\theta)$是L的对偶标准理想；

(2) 存在a，$d\in L$，使得$K(\theta)=(a]$，$D(\theta)=[d)$，并且对任意x，$y\in L$满足：

$$x\equiv y(\mathrm{mod}\ \theta)\Longleftrightarrow x\vee a=y\vee a\Longleftrightarrow x\wedge d=y\wedge d;$$

(3) $\overline{\varphi}_a$：$[x]\mapsto x\vee a$及$\overline{\varphi}_d$：$[y]\mapsto y\wedge d$分别是商格L/θ到区间子格$[a, I]$及$[O, d]$的格同构；

(4) $x\in L$的同余类$[x]=\{y \mid y\in L,\ y\equiv x(\mathrm{mod}\ \theta)\}$中有最大元$I_x$和最小元$O_x$，并且对任意$y\in[x]$，有$y\vee a=I_x$，$y\wedge d=O_x$；

(5) a，d 是 L 中互补的中心元，且 $L \cong [O, a][O, d]$.

证 (1)—(3)由§3.5定理5，推论5及对偶原则即得证.

(4)令 $I_x = x \vee a$，$O_x = x \wedge d$. 易见 I_x，$O_x \in [x]$，并且对任意 $y \in [x]$，由(2)知 $y \vee a = I_x$，$y \wedge d = O_x$. 因此 I_x，O_x 分别是 $[x]$ 中的最大元和最小元.

(5)由于 O 是 $K(\theta) = (a]$ 的最小元，I 是 $D(\theta) = [d)$ 的最大元，因此由(4)得 $a \wedge d = O$，$a \vee d = I$，即 a，d 是互补元. 由§3.8定理4知 a 是标准元，d 是对偶标准元. 对任意 $x, y \in L$，令 $d \wedge x$ 在 x 内的补元为 t，则 $(d \wedge x) \vee t = x$，$d \wedge x \wedge t = O$. 由(2)知 $x \wedge t \in K(\theta) = (a]$，因此 $t = x \wedge t \leqslant a \wedge x$，从而

$$x = (d \wedge x) \vee t \leqslant (d \wedge x) \vee (a \wedge x) \leqslant x,$$

即 $x = (d \wedge x) \vee (a \wedge x)$. 于是

$$x \vee d = (x \wedge a) \vee d \qquad (\forall x \in L).$$

特别地，若令

$$(x \vee y) \wedge a = u, \quad (a \wedge x) \vee (y \wedge a) = v,$$

则 $$u \wedge d = v \wedge d = O, \quad u \vee d = (x \vee y) \vee d = v \vee d.$$

由于 d 是对偶标准元，其相对补元唯一，故 $u = v$. 因此 φ_a：$x \mapsto x \wedge a$ 是 L 的格自同态，从而 a 是对偶标准元. 由§3.8定理2、定理3知 a 是中心元. 由§3.7定理1知 d 也是中心元. 由于中心元一定是分配元，因此 τ：$x \mapsto (x \wedge a, x \wedge d)$ 是 L 到 $[O, a][O, d]$ 的格同态. 若 $\tau(x) = \tau(y)$，则 $x \wedge a = y \wedge a$，$x \wedge d = y \wedge d$，由上面得到的结果，$x \vee d = (x \wedge a) \vee d = (y \wedge a) \vee d = y \vee d$. 于是 $x = y$，即 τ 是单射. $\forall\, b \in [O, a]$，$c \in [O, d]$，显然 $c \wedge a = O = b \wedge d$. 令 $y = b \vee c$，则 $y \wedge a$

$=b$，$y\wedge d=c$，因此$\tau(y)=(b, c)$．故τ是满射，从而是格同构．▌

推论2 设L是有限长的相对有补格，$a\in L$．则下述条件等价：

(1) a是标准元；

(2) a是分配元；

(3) a是中心元．

证明留作练习．▌

在§3.5及§3.7中分别定义了简单格和既约格．对于有限长的相对有补格，二者是等价的．

定理4 设L是任意非平凡的有限长相对有补格，则

(1) L是简单格$\Longleftrightarrow L$是既约格；

(2) L可唯一地（同构意义下）分解成有限个非平凡的简单格的积．

证 (1) 若L不是简单格，即L有真同余关系θ，由定理3知$L\cong[O, a][O, d]$，于是L不是既约格．反之，若L有非平凡的积分解$L=L_1L_2$，则存在格同态τ：$L\longrightarrow L_1$，τ决定了L的一个真同余关系．因此L不是简单格．

(2) 由§3.7推论3知L可唯一地（同构意义下）分解成有限个非平凡既约格之积．其中每个因子皆是L的同态象，因而也是有限长的相对有补格，由(1)知是简单格．▌

练　习

1. 证明本节推论2．

2. 在定理3中证明：对任意$x\in L$，

$$x=(x\wedge a)\vee(x\wedge d).$$

3.在有O的格L中，定义二元关系∇：

$$a\nabla b \Longleftrightarrow a\wedge b=O \text{且} (a\vee x)\wedge b=x\wedge b(\forall x\in L).$$

证明：

(1)若L是相对有补格，则二元关系∇是对称的，并且由$a\nabla b$，$a_1\leqslant a$，$b_1\leqslant b$可推出$a_1\nabla b_1$.

(2)若L是有泛界O，I的相对有补格，则下述条件等价：

i)$a\nabla b$.

ii)b含在a的每一个补元内；

iii)若$a_1\leqslant a$，$b_1\leqslant b$且a_1，b_1有公共补元，则$a_1=b_1=O$；

iv)对任意$x\in L$，$x=(x\vee a)\wedge(x\vee b)$.

(3)若L是模格，则

$$a\nabla b \Longleftrightarrow a\wedge b=O \text{ 且 } (a,b,x)D(\forall x\in L).$$

§6.2 有补模格

由§3.2定理7知道有补模格一定是相对有补格，因此前节中有关相对有补格的所有结论对于有补模格都成立。由§6.1定理1、定理3及定理4直接可得

推论1 在有补模格中，对任意元素$a\neq O$，下述条件等价：

(1)a是$\vee$-既约元；

(2)a是$\vee$-直既约元；

(3)a是原子。▌

推论2 设L是非平凡的有限长有补模格，

(1)若θ是L的格同余关系，则存在互补的中心元a，d

$\in L$，使得$K(\theta)=(a]$，$D(\theta)=[d)$，并且

$$L\cong[O,a][O,d];$$

(2)L是简单格$\Longleftrightarrow L$是既约格；

(3)L可唯一地(同构意义下)分解成有限个非平凡的简单有补模格的积. ∎

§6.1推论2中条件"有限长"对于有补模格来说是多余的.

定理1 设L是有补模格，$a\in L$，则下述条件等价：

(1)a是中心元；

(2)a是分配元；

(3)a是标准元；

(4)a是对偶标准元；

(5)a有唯一补元.

证 由§3.8定理2、定理3及§5.4推论2知(1)、(2)、(3)、(4)彼此等价. 若(1)成立，即a是中心元，由§3.7定理1知a的补元唯一. 反之，若(5)成立，设a'是a的唯一补元. 对任意$y\in L$，若$y\wedge a=O$，则a，y，$(a\vee y)'$是序列独立，从而独立(§5.5定理5). 因此$a\wedge(y\vee(a\vee y)')=O$，而$a\vee y\vee(a\vee y)'=I$，即$y\vee(a\vee y')$是$a$的补元，因此$y\vee(y\vee a)'=a'$，故$y\leqslant a'$. 特别地，对任意$x\in L$，$((a\wedge x)'\wedge x)\wedge a=O$，于是$(a\wedge x)'\wedge x\leqslant a'\wedge x$. 由模律，

$$x=(a\wedge x)\vee((a\wedge x)'\wedge x)\leqslant(a\wedge x)\vee(a'\wedge x)\leqslant x,$$

因此$x=(a\wedge x)\vee(a'\wedge x)$. 由此可得

$$a\vee x=a\vee(a'\wedge x),\quad a'\wedge x=a'\wedge(a\vee x),\quad\forall x\in L.$$

于是

$$\begin{aligned}a\vee(x\wedge y)&=a\vee(a'\wedge x\wedge y)\\&=a\vee(a'\wedge(a\vee x)\wedge(a\vee y))\end{aligned}$$

$$=(a\vee x)\wedge(a\vee y).$$

显然 $a\vee(x\vee y)=(a\vee x)\vee(a\vee y)$，故 ψ_a: $x\mapsto x\vee a$ 是格同态. 由§5.4推论2知a是分配元，从而是中心元. 因此(1)与(5)等价. ▌

下面的结果给出了有限长有补模格的特征.

定理2 设L是有限长模格，则下述条件等价：

(1)L是有补格；

(2)L是相对有补格；

(3)L是分段有补格；

(4)任意$a\neq O(a\in L)$是原子的并；

(5)I是原子的并.

证 这是§3.2定理7及§6.1定理2的直接推论. ▌

定理3 设L是有补模格，则下述条件等价：

(1)L满足极大条件；

(2)L满足极小条件；

(3)L是有限维的.

证 设L满足极大条件，S是L的非空子集. 记S'为S中所有元素的补元组成的集合，则$S'\neq\varnothing$. 由假设，S'有极大元x'，不妨设x'是$x\in S$的补元. 下面证明x是S的极小元. 事实上，若有$y\in S$，$y\leqslant x$，记$\bar{y}$为y在x内的补元，即$y\wedge\bar{y}=O$，$y\vee\bar{y}=x$. 显然

$$y\vee(x'\vee\bar{y})=I,$$

$$y\wedge(x'\vee\bar{y})=(y\wedge x)\wedge(x'\vee\bar{y})$$
$$=y\wedge((x\wedge x')\vee\bar{y})=y\wedge\bar{y}=O.$$

因此$x'\vee\bar{y}$是y的补元，从而$x'\vee\bar{y}\in S'$. 由于x'是S'中的极大元，故有$x'=x'\vee\bar{y}$，即$\bar{y}\leqslant x'\wedge x=O$，于是$\bar{y}=O$，

由此得$x=y$．因此x是S的极小元，即L满足极小条件．反之，若L满足极小条件，可推出L也满足极大条件．因此(1)与(2)等价．

(3)显然蕴涵(1)．若(1)成立，则(2)亦成立，于是L中所有链均为有限链．由§5.4推论1知L是有限维的，故(1)与(3)等价．▌

利用独立性概念可证下述结果．

定理4 设L是有补模格，$a\leqslant b$(a, $b\in L$)，则对任意$x\in L$，存在$y\in L$使得$x=(x\vee y)\wedge(x\vee a)$，且$a\wedge y=O$，$a\vee y=b$(即$y$是$a$在$b$内的补元)．

证 令$x_1=x\wedge a$，x_2是x_1在$x\wedge b$内的补元，x_3是x_1在a内的补元，y_1是$a\vee x_2$在b内的补元．易证x_1，x_2，x_3，y_1序列独立，从而独立(§5.5定理5)．由此推出x_1，x_2，$x_3\vee y_1$独立．令$y=x_2\vee y_1$，显然$a\wedge y=O$，$a\vee y=b$，并且

$$(x\vee y)\wedge(x\vee a)=(x\vee x_2\vee y_1)\wedge(x\vee x_3\vee x_1)$$
$$=(x\vee y_1)\wedge(x\vee x_3),$$
$$(x\vee x)\wedge(y_1\vee x_3)=x\wedge b\wedge(y_1\vee x_3)$$
$$=(x_2\vee x_1)\wedge(y_1\vee x_3)=O.$$

由§5.5推论2得

$$(x\vee y_1)\wedge(x\vee x_3)=x\vee(y_1\wedge x_3)=x\vee O=x.$$

故$x=(x\vee y)\wedge(x\vee a)$．▌

练　　习

1. 设L是有补模格，$a_i\in L$($i=1$, 2, $\cdots$, s)，a_i'是a_i的补元，$d_k=a'_{k-1}\wedge a_k$($k=1$, 2, $\cdots$, s)．若$a_0=O<a_1<\cdots<a_s$，证明：d_1，d_2，$\cdots$，d_s独立，并且$a_s=d_1\vee d_2\vee\cdots\vee$

d_s.

2. 利用练习1的结果证明有补模格是相对有补格.

3. 在有补模格L中，若$a\leqslant b$，证明：x是a在b内的补元$\Longleftrightarrow$存在a在L内的补元a'使得$x=a'\wedge b$.

§6.3 透视性

设L是有泛界O，I的格. 元素a，$b\in L$称为**透视**的，如果它们有一个公共的补元c. 这时称c是a，b的**透视轴**，记作$a\underset{c}{\sim}b$.

若a，b透视，则区间$[O, a]$，$[O, b]$一定射影. 在有补格中，透视性是反身的和对称的，但未必是传递的(例1). 在有限维有补模格中，透视是一个等价关系(定理6).

定理1 在有补模格L中，对任意a，$b\in L$，

(1) 若$[e, f]$是L的区间，且a，$b\in[e,f]$，则a，b在L中透视$\Longleftrightarrow a$，b在区间子格$[e, f]$中透视；

(2) 若a_1是$a\wedge b$在a内的补元，b_1是b在$a\vee b$内的补元，则a_1，b_1在L内是透视的；

(3) $[O, a]$与$[O, b]$射影$\Longleftrightarrow a$，b由一列依次透视的元相连接，即存在$a=x_0$，x_1，$\cdots$，$x_n=b$，使得x_i与x_{i+1}是透视的$(i=0, 1, \cdots, n-1)$.

证 (1) 设a，b在L中透视，c为透视轴，则$a\wedge c=b\wedge c=O$，$a\vee c=b\vee c=I$. 令$c_1=(c\wedge f)\vee e$，则利用模律可证

$$a\vee c_1=a\vee(c\wedge f)=(a\vee c)\wedge f=f,$$

$$a \wedge c_1 = a \wedge ((c \wedge f) \vee e) = (a \wedge (c \wedge f)) \vee e = e.$$

即c_1是a在区间$[e, f]$内的相对补元．同理，c_1也是b在区间$[e, f]$内的相对补元．因此a，b在区间子格$[e, f]$中透视．反之，若a，b在$[e, f]$中透视，设$c_1 \in [e, f]$是透视轴，则$a \wedge c_1 = b \wedge c_1 = e$，$a \vee c_1 = b \vee c_1 = f$．令$e_1$是$e$在$c_1$内的补元，即$e_1 \wedge e = O$，$e_1 \vee e = c_1$，易证$e_1 \wedge a = e_1 \wedge b = O$，$e_1 \vee a = e_1 \vee b = f$．再令$c$是$f$在区间$[e_1, I]$内的相对补元，则$e_1 \leqslant c \leqslant I$，$c \wedge f = e_1$，$c \vee f = I$，于是

$$a \vee c = a \vee (e_1 \vee c) = (a \vee e_1) \vee c = f \vee c = I,$$

$$a \wedge c = (a \wedge f) \wedge c = a \wedge (f \wedge c) = a \wedge e_1 = O.$$

同理，$b \vee c = I$，$b \wedge c = O$．因此c是a，b在L内的公共补元．故a，b在L内透视．

(2)由假设可知$a_1 \wedge (a \wedge b) = b_1 \wedge b = O$，$a_1 \vee (a \vee b) = a$，$b_1 \vee b = a \vee b$．由吸收律得

$$a_1 \vee b = a_1 \vee ((a \wedge b) \vee b) = a \vee b,$$

$$a_1 \wedge b = (a_1 \wedge a) \wedge b = a_1 \wedge (a \wedge b) = O,$$

即b也是a_1在$a \vee b$内的补元，因此a_1，b_1在区间$[O, a \vee b]$内透视，由(1)知它们在L中透视．

(3)若存在一列元素$a = x_0$，x_1，…，$x_n = b$，使得$x_i \sim x_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$，则易见$[O, x_i]$与$[c_i, I]$转置，$[c_i, I]$与$[O, x_{i+1}]$转置，因此$[O, x_i]$与$[O, x_{i+1}]$射影．而射影关系是传递的，故$[O, a]$与$[O, b]$射影．反之，若$[O, a]$与$[O, b]$射影，则存在一列区间$[O, a]$，$[a_1, b_1]$，…，$[a_n, b_n]$，$[O, b]$，使每相邻两个区间是转置的．令$c_i$是$a_i$在$b_i$内的补元$(i = 1, 2, \cdots, n)$，由(2)知元素列$a$，$c_1$，$c_2$，…，$c_n$，$b$中每相邻两个元素是透视的．▮

由定理1(2)可知，在有补模格中，若$[u, v]$，$[x, y]$是转置区间，u_1，x_1分别是u在v内及x在y内的补元，则u_1，x_1透视．

推论1 在有补模格中，

(1)若透视关系是传递的，则a，b透视$\Longleftrightarrow [O, a]$，$[O, b]$射影；

(2)若$a<b$，则a与b不透视．

证 (1)显然．设$a<b$．若$a \underset{\sim}{c} b$，则$a\wedge c=b\wedge c$，$a\vee c=b\vee c$．由§5.4定理1得$a=b$，矛盾．因此(2)成立．∎

为了说明在一般格(甚至有补模格)中，透视性不满足传递律，先证明下述结果：

定理2 设V是数域F上的向量空间，A，B是V的任意子空间．若$A\cap B=\{0\}$且A，B维数相同，则在V的子空间格M中，A，B是透视的．

证 显然M是有补模格．由于A，B维数相同，因此存在同构映射θ：$A\to B$．令

$$D=\{x+\theta(x)\,|\,x\in A\},$$

则D是V的子空间，并且易证$A\cap D=B\cap D=\{0\}$，$A+D=A+B=B+D$，因此A，B在M的区间子格$[O, A\vee B]$内是透视的，由定理1知A，B在M内透视．∎

例1 设V是数域F上可数维向量空间，$A\subset B$是V的无限维子空间，并且B有无限维的补子空间D，则$B\cap D=A\cap D=\{0\}$，且A，B，D维数相同．由定理2知在V的子空间格M中，A与D透视，D与B透视．但是由推论1(2)知A与B不透视．故透视关系不满足传递律．

定理3 设L是有限维有补模格，p，q，r，$p_i\in L$是原

子$(i=1, 2, \cdots, m)$.

(1)若$p\neq q$，则p，q透视$\Longleftrightarrow p\vee q$含有第三个原子；

(2)若p，q透视，q，r透视，则p，r透视；

(3)若$q\leqslant p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m$，则存在某一$p_j(1\leqslant j\leqslant m)$使得$q$与$p_j$透视；

(4)$p_1, p_2, \cdots, p_m$独立$\Longleftrightarrow p_1, p_2, \cdots, p_m$两两互不透视

证 (1)设$p\underline{c}q$，$p\neq q$，则$p\vee c=q\vee c=p\vee q\vee c$覆盖$c$(§5.1推论3)．令$s=(p\vee q)\wedge c$，由维数公式

$$\begin{aligned}h(s)&=h(p\vee q)+h(c)-h(p\vee q\vee c)\\&=h(p\vee q)+h(c)-(h(c)+1)\\&=2-1=1,\end{aligned}$$

因此s是原子．显然$s\leqslant p\vee q$，且$s\neq p$，$s\neq q$．反之，若$p\vee q$含有第三个原子s，利用维数公式可知$p\vee s=q\vee s=p\vee q$，$p\wedge s=q\wedge s=O$．因此s是p，q在区间$[O, p\vee q]$内公共的相对补元，由定理1知p，q在L内透视．

(2)设p，q透视，q，r透视．不妨假定p，q，r两两不同，则由(1)知存在异于p，q的原子s及异于q，r的原子t，使得$s<p\vee q$，$t<q\vee r$．若$s=t$或$q\leqslant p\vee r$，由(1)知p，r透视．设$s\neq t$且$q\not\leqslant p\vee r$，则

$$h(s\vee t)=h(p\vee r)=2,$$

$$h(s\vee t\vee p\vee r)\leqslant h(p\vee q\vee r)=3.$$

令$w=(s\vee t)\wedge(p\vee r)$，则

$$\begin{aligned}h(w)&=h(s\vee t)+h(p\vee r)-h(s\vee t\vee p\vee r)\\&\geqslant 2+2-3=1,\end{aligned}$$

因此w含有原子u．显然$u\leqslant s\vee t$，且$u\leqslant p\vee r$．若$u=p$，则$q\leqslant p\vee q=p\vee s\leqslant s\vee t$，于是$q\vee r=q\vee t\leqslant s\vee t$，$p\vee q\vee r\leqslant$

$s\vee t$. 此与$h(p\vee q\vee r)=3$矛盾，因此$u\neq p$. 同理，$u\neq r$，故p，r透视.

(3)由§5.3定理3，不妨设p_1，p_2，…，p_m独立. 对m使用数学归纳法. 当$m=1$时，结论显然成立. 假设结论对于$m-1$的情形已经成立. 若$q=p_1$或$q\leqslant p_2\vee\cdots\vee p_m$，则结论成立. 设$q\neq p_1$且$q\not\leqslant p_2\vee\cdots\vee p_m$，则

$$q\vee p_2\vee\cdots\vee p_m\leqslant p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m,$$

且两者同时覆盖$p_2\vee\cdots\vee p_m$(§5.1推论3). 因此

$$q\vee p_2\vee\cdots\vee p_m=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m.$$

显然 $$q\wedge(p_2\vee\cdots\vee p_m)=p_1\wedge(p_2\vee\cdots\vee p_m)=O,$$

即$p_2\vee\cdots\vee p_m$是q，p_1在区间$[O,\ p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_m]$内公共的相对补元. 由定理1知$q$，$p_1$透视.

(4)由(1)知必要性成立，下证充分性. 设p_1，p_2，…，p_m两两互不透视. 对任意p_j，由(3)知必有

$$p_j\not\leqslant p_1\vee\cdots\vee p_{j-1}\vee p_{j+1}\vee\cdots\vee p_m,$$

从而 $$p_j\wedge(p_1\vee\cdots\vee p_{j-1}\vee p_{j+1}\vee\cdots\vee p_m)=O,$$

故p_1，p_2，…，p_m独立. ▌

由上述结果可知，在有限维有补模格中，原子间的透视关系是等价关系，因此全体原子可依透视关系分成一些等价类，不同的等价类的个数是有限的($\leqslant L$的维数).

定理4 设L是有限维有补模格，E_1，E_2，…，E_s是L中原子元的透视等价类. 令$e_i=\bigvee\limits_{p\in E_i}p$，$L_i=[O,\ e_i]$，则$e_1$，$e_2$，…，$e_s$是独立的，并且$L\cong L_1L_2\cdots L_s$.

证 若e_1，e_2，…，e_s不独立，不妨设$e_1\wedge(e_2\vee\cdots\vee e_s)\neq O$，则存在原子$p\in L$，使得$p\leqslant e_1$且$q\leqslant e_2\vee\cdots\vee e_s$. 由定

理3(3)知有某个$E_j(2\leqslant j\leqslant s)$使$q\in E_1\cap E_j$，矛盾．因此$e_1$，$e_2$，…，$e_s$独立．由§6.2定理2知，$L$中任意元$a$可表为原子的并，由此易证$L$是由区间$L_i(i=1, 2, \cdots, s)$生成的格．因此由§5.5推论3知$L\cong\prod_{i=1}^{s}L_i$．▮

推论2 设L是有限维有补模格，则下述条件等价：

(1) L是简单格；

(2) L是既约格；

(3) L中任意两个原子p，q透视；

(4) L中任意两个原子p，q决定的区间$[O,p]$，$[O,q]$射影．

证 由§6.2推论2知(1)与(2)等价．由定理4知(2)蕴涵(3)．若(3)成立，但L有非平凡的积分解$L=L_1L_2$，设$p_1\in L_1$，$p_2\in L_2$是原子，易见$p=(p_1, O)$，$q=(O, p_2)$是L中的原子，但p，q不透视，因此(3)蕴涵(2)，即(2)与(3)等价．利用维数公式易证与原子透视的元素仍是原子．由此知(3)与(4)等价．▮

定理5 在既约的有限维有补模格中，两个元素透视当且仅当它们的维数相等．

证 设L是既约的有限维有补模格，a，$b\in L$．若$a\underset{c}{\sim}b$，则$a\wedge c=b\wedge c=O$，$a\vee c=b\vee c=I$，因而

$$h(a)=h(I)-h(c)=h(b).$$

反之，若$h(a)=h(b)$，令

$$r=h(a)-h(a\wedge b)=h(b)-h(a\wedge b),$$

u，v分别是$a\wedge b$在$[O, a]$及$[O, b]$内的相对补元．显然$u\wedge v=O$．$h(u)=h(v)=r$．由§5.3定理2、定理3及§6.2定理2知存在独立的原子p_1，p_2，…，p_r及q_1，q_2，…，q_r，使得

$u=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_r$, $v=q_1\vee q_2\vee\cdots\vee q_r$. 显然 $p_i\neq p_j$ ($\forall i$, $j=1, 2, \cdots, r$). 由定理3及推论2知 $p_i\vee q_i$ 含有第三个原子 t_i, 并且 $p_i\vee t_i=q_i\vee t_i=p_i\vee q_i$ ($i=1, 2, \cdots, r$), 易见 $t_1, t_2, \cdots, t_r$独立. 于是

$$\begin{aligned}a\vee t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_r&=(a\wedge b)\vee u\vee t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_r\\&=(a\wedge b)\vee p_1\vee t_1\vee p_2\vee t_2\vee\cdots\vee p_r\vee t_r\\&=(a\wedge b)\vee p_1\vee q_1\vee p_2\vee q_2\vee\cdots\vee p_r\vee q_r\\&=(a\wedge b)\vee u\vee v=a\vee b,\end{aligned}$$

由维数公式得

$$\begin{aligned}h(a\vee t_1\vee\cdots\vee t_r)=h(a\vee b)&=h(a)+h(b)-h(a\wedge b)\\&=h(a)+r\\&=h(a)+h(t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_r),\end{aligned}$$

因此$h(a\wedge(t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_r))=O$, 即$a\wedge(t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_r)=O$. 所以$t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_r$是$a$在$[O, a\vee b]$内的相对补元. 同理, $t_1\vee t_2\vee\cdots\vee t_r$也是$b$在$[O, a\vee b]$内的相对补元. 由定理1知$a$, b在L内透视. ▮

由上述结果可知, 在既约的有限维有补模格中, 透视关系是传递的, 因而是等价关系. 这在任意的有限维有补模格中也是对的.

定理6 在有限维有补模格中, 透视关系是传递的, 因而是等价关系.

证 设L是有限维有补模格. 由§6.2推论2不妨设$L=L_1L_2\cdots L_s$, L_i为非平凡的既约有限维有补模格. 对L中任意两个元素$a=(a_1, a_2, \cdots, a_s)$, $b=(b_1, b_2, \cdots, b_s)$ ($a_i, b_i\in L_i$, $i=1, 2, \cdots, s$), 易证a, b透视$\Longleftrightarrow a_i$, b_i在L_i中透视($\forall i=1, 2, \cdots, s$). 由于$L_i$中透视关系是传递

的，因此L中亦然．故透视关系是L的等价关系．∎

由推论1直接得

推论3 在有限维有补模格中，元素a，b透视$\Longleftrightarrow$区间$[O, a]$，$[O, b]$射影．∎

练 习

1．设L是有补模格，N是L的理想，且满足性质：

(＊) 对任意a，$b\in L$，若a，b透视且$a\in N$，则$b\in N$

证明：如下定义的L的二元关系θ：

$x\equiv y(\text{mod }\theta)\Longleftrightarrow$存在$a\in N$使得$x\vee a=y\vee a$

是格同余关系．反之，若θ是L的格同余关系，则

$$K(\theta)=\{x\mid x\in L,\ x\equiv O(\text{mod }\theta)\}$$

是L的理想，且具有性质(＊)．

2．证明：在有补模格L中，理想N是中立的(即N在理想格$\hat{L}$中是分配元)当且仅当N具有上述性质(＊)．由此得出L的格同余关系一一对应于L的中立理想．

3．在定理1(2)中，具体找出a_1，b_1的一个透视轴．

4．设L是有限维有补模格，p_i，$q\in L$是原子($i=1, 2, \cdots, r$)，p_{i_1}，p_{i_2}，$\cdots$，p_{i_s}是诸p_i中所有与q透视的原子．证明：$q\leqslant p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_r\Longleftrightarrow q\leqslant p_{i_1}\vee p_{i_2}\vee\cdots\vee p_{i_s}$．

5．在定理4中证明：$a\in L$是中心元$\Longleftrightarrow a$是若干e_i之并．

§6.4 几何格与模几何格

首先引入原子格的概念．

设L是一个有O的格，若L中每一个非零元素都是一些原子的并，则称L为**原子格**(或**点格**).

由§6.1推论1和定理2可得

推论1 满足极小条件的分段有补格(特别，有限长的相对有补格)是原子格. ■

推论2 若L是有限长的上半模格，则下述条件等价：

(1)L是原子格；

(2)L是相对有补格；

(3)L是分段有补格. ■

由§6.2定理2得

推论3 设L是有限长模格，则下述条件等价：

(1)L是原子格；

(2)L是有补格；

(3)L是相对有补格；

(4)L是分段有补格；

(5)I是原子的并. ■

有限长的上半模原子格叫做**几何格**，有限长的模原子格叫做**模几何格**.

由以上结果可知

定理1 设L是任意格，则

(1)L是几何格$\Longleftrightarrow L$是有限长的相对有补上半模格；

(2)L是模几何格$\Longleftrightarrow L$是有限长的有补模格.

证明显然. ■

推论4 任何几何格(模几何格)可唯一地(同构意义下)分解成有限多个简单的几何格(模几何格)的积.

证 由§6.1定理4(§6.2推论2)直接可得. ■

关于有限长的原子格，有下述结果：

定理2 设L是有限长的原子格，则下述条件等价：

(1) L是几何格；

(2) L是上半模格；

(3) 对任意x，$y \in L$，若$x \wedge y \prec x$，则$y \prec x \vee y$；

(4) 对任意$a \in L$及原子$p \in L$，pMa；

(5) 对任意$a \in L$及原子$p \in L$，若$p \nleq a$，则$a \prec a \vee p$；

(6) 对任意$a \in L$及原子p，$q \in L$，若$a < a \vee q \leqslant a \vee p$，则$a \vee q = a \vee p$；

(7) 原子的序列独立是对称的.

证 由定义及§5.1定理3可知(1)$\Longleftrightarrow$(2)$\Longleftrightarrow$(3)．由§5.3推论3知(2)$\Rightarrow$(7)成立．设(7)成立，$p,q \in L$是原子，$a \in L$，且$a < a \vee q \leqslant a \vee p$．若$a = O$，显然$a \vee q = a \vee p$．若$a > O$，则存在独立的原子$p_1$，…，$p_r$，使得$a = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r$．由于$(a \vee p) \wedge q = q \neq O$，因此$p_1$，$p_2$，…，$p_r$，$p$，$q$非序列独立，从而$p_1$，$p_2$，…，$p_r$，$q$，$p$也非序列独立．由$a < a \vee q$，$q$是原子，易证$a \wedge q = 0$，于是$p_1$，$p_2$，…，$p_r$，$q$序列独立，由此推得$(a \vee q) \wedge p \neq O$（否则将导出$p_1$，$p_2$，…，$p_r$，$q$，$p$序列独立，矛盾）．因此

$$(a \vee q) \wedge p = p \leqslant a \vee q \leqslant a \vee p,$$

从而$a \vee p = a \vee q$，故(7)$\Rightarrow$(6)成立．设(6)成立，$a, p \in L$，p是原子．若$p \nleq a$，则$a < a \vee p$．如果有$b \in L$，$a < b \leqslant a \vee p$，不妨设$b = q_1 \vee q_2 \vee \cdots \vee q_r$，$q_i \in L$是原子($i = 1, 2, \cdots, r$)，则存在$q_j$使得$q_j \nleq a$．于是$a < a \vee q_j \leqslant b \leqslant a \vee p$，由(6)得$a \vee p = a \vee q_j = b$．因此$a \prec a \vee p$，从而(6)蕴涵(5)．设(5)成立．$a$，$p \in L$，$p$为原子．若$p \leqslant a$，则由§5.2推论1

知pMa. 若$p\not\leqslant a$, 则对任意的$t\leqslant a$, $t\prec p\vee t$, $p\vee t\neq a\wedge(p\vee t)$. 显然$t\leqslant a\wedge(p\vee t)\leqslant p\vee t$, 因此$a\wedge(p\vee t)=(a\wedge p)\vee t=t$. 由§5.2定理2知$pMa$, 故(5)蕴涵(4). 最后设(4)成立, 任取x, $y\in L$. 若$x\wedge y\prec x$, 则存在原子$p\in L$, $p\leqslant x$但$p\not\leqslant x\wedge y$, 且$x=p\vee(x\wedge y)$. 若有$b\in L$使得$y\leqslant b\leqslant x\vee y$, 显然$y\vee p\leqslant b\vee p\leqslant x\vee y$. 由于

$$x=p\vee(x\wedge y)\leqslant x\wedge(p\vee y)\leqslant p\vee y,$$

因此$y\vee p=b\vee p=x\vee y$. 若$p\leqslant b$, 显然$b=x\vee y$. 若$p\not\leqslant b$, 则$p\wedge b=O$, 因此$y\in[p\wedge b,\ b]$, 又由(4)知pMb. 由§5.2定理2得$y=y\vee(p\wedge b)=(p\vee y)\wedge b=b$. 由此知$y\prec x\vee y$, 故(4)蕴涵(3). ▌

特别地，对于有限长的相对有补格(或分段有补格)，定理2的结论为真.

练　　习

1. 设G是一个几何格，P是G的所有原子组成的集合. 证明：G的子集

$$\mathscr{L}(P)=\{\bigvee_{q\in S}q\mid S\subseteq P\}$$

(作为子偏序集)是一个几何格.

2. 设L是几何格，a, b, $c\in L$, b, c是a的补元且$c\leqslant b$. 若aMb, 证明：$b=c$.

3. 证明：在一个几何格G内，若原子间的透视关系是传递的，则G是模的.

4. 证明：几何格的区间子格是几何格，几何格的积是几何格.

§6.5 射影几何

所谓一个**射影空间**是指由一个集合P(其元素叫做**点**)及P的某些子集(称为**线**)所组成的一个系统，满足以下公理：

PG1. 两个不同的点p，q属于且仅属于一条线(称为**由p，q决定的线**)；

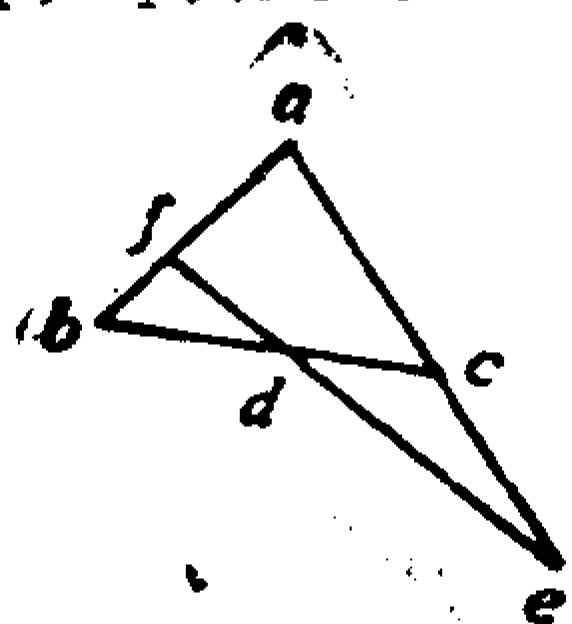


图6.5.1

PG2. 若a，b，c是不共线的三个点，d．e是不同的点，并且b，c，d共线．c，a，e共线，则存在点f使得a，b，f共线，且d，e，f共线(参见图6.5.1)；

PG3. 每条线至少含有三个不同的点．

若S是P的子集，且对任意线l，当l包含S中两个不同点时，则l必定整个地含在S中，这时称S为P的一个**射影子空间**(简称**子空间**)．

特别地，空子集$\varnothing$及单点集$\{p\}$($\forall p \in P$)都是子空间．易证任意多个子空间的交集仍是一个子空间．任何一个射影子空间连同它所包含的线，也构成一个射影空间．

可以递归地定义射影空间的“维”．

称由一个点构成的射影空间是**零维**的，每条线是**一维**的，…，假定$n-1$维射影空间已经定义，则称射影空间S是**n维**的当且仅当存在一个$n-1$维子空间$T \subseteq S$及一个点$a \in S$且$a \in T$，使得S中每一个点属于a与T中某点所决定的线上．

特别地，规定$\varnothing$的维是-1．2维射影空间通常叫做一

个**射影平面**.

射影空间与模几何格有密切联系

定理1 设P是一个n维射影空间，$\mathscr{L}(P)$是全体射影子空间组成的集合. 关于集合包含关系，$\mathscr{L}(P)$成为一个$n+1$维简单模几何格.

证 易见$(\mathscr{L}(P),\subseteq)$成为格. 其中若$A$, $B\in\mathscr{L}(P)$，则

$$A\wedge B=A\cap B,$$

$$A\vee B=\cap\{C\mid C\in\mathscr{L}(P),\ A\subseteq C\text{且}B\subseteq C\}.$$

显然当$A=\varnothing$时，$A\vee B=B$. 当$A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$时，$A\vee B$等于所有相异两点p, $q\in A\cup B$所决定的线的并集. 所有单点集$\{p\}(p\in P)$是$\mathscr{L}(P)$中的原子. $\mathscr{L}(P)$是长为$n+1$的原子格. 若A, $B\in\mathscr{L}(P)$, $B\subseteq A$, 任取$p\in A\wedge(B\vee C)$, 则$p\in A$且$p\in B\vee C$. 如果$p\in B$或$p\in C$, 则$P\in B\vee(A\wedge C)$. 如果$p\overline{\in}B$且$p\overline{\in}C$, 则存在$b\in B$及$c\in C$使得p, b, c共线. 另外$p\in A$, $b\in B\subseteq A$, $p\neq b$, A是子空间，因此$c\in A\wedge C$, 从而$p\in B\vee(A\wedge C)$. 由上述可知$A\wedge(B\vee C)\subseteq B\vee(A\wedge C)$. 再由模不等式知$A\wedge(B\vee C)=B\vee(A\wedge C)$. 故$\mathscr{L}(P)$是模格，从而是$n+1$维模几何格. 由§6.3定理3、推论2及PG3知$\mathscr{L}(P)$是简单格. ▌

定理2 设G是一个长为$n(n>1)$的简单模几何格，P是G的所有原子组成的集合. 规定G中每个维数为2的元素λ所含的原子组成的P的子集叫做线，则P以及这些线构成一个$n-1$维射影空间，并且P的子空间格$\mathscr{L}(P)$与G同构.

证 显然两个不同的点(原子)决定唯一的一条线(即$p\vee q$所含的原子)，因此PG1成立. 设有不共线的三点a, b, c(见图6.5.1)，若有相异两点d, e使得b, c, d共线，c, a, e共

线，即$d\leqslant b\vee c$，$e\leqslant a\vee c$．利用维数公式可证

$$h\ ((d\vee e)\wedge(a\vee b))\ =1,$$

因此$f=(d\vee e)\wedge(a\vee b)$是原子，即$f\in P$，且$f\leqslant a\vee b$．于是PG2成立．由于$G$是简单格，易见PG3成立，故$P$是一个射影空间．显然$P$的子集$S$是$k$维子空间当且仅当$S$恰是$G$中某个$k+1$维元素$\lambda$所包含的全部原子（证明留给读者），因此$P$是$n-1$维射影空间．令$\varphi$：$G\to\mathscr{L}(P)$，使对任意$\lambda\in G$，$\varphi(\lambda)=\{p\mid p\in P且p\leqslant\lambda\}$，则$\varphi$是格同构映射（证明留作练习）．∎

由以上可知，一个简单模几何格本质上是一个射影空间．

称d维（$d>1$）简单模几何格为$d-1$维**射影几何**．

由§6.3推论2直接可得

定理3 设L是维数大于1的模几何格，则下述条件等价：

(1) L是射影几何；

(2) L是简单格；

(3) L是是既约格；

(4) L的所有原子彼此透视；

(5) 在L中只有泛界O，I的补元唯一．

证 只须证(2)$\Longleftrightarrow$(5)．设L是简单格，则L中任意两个原子透视．若$a\in L$，且$a\neq O$，I，a'是a的补元，易知$a'\neq O$，I．显然存在独立的原子p_1，p_2，…，p_r，p_{r+1}，…，p_n，使得

$$a=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_r,\quad a'=p_{r+1}\vee p_{r+2}\vee\cdots\vee p_n.$$

由于p_1，p_{r+1}透视，因而$p_1\vee p_{r+1}$含有第三个原子q，使得

$p_1 \vee q = p_{r+1} \vee q = p_1 \vee p_{r+1}$. 由此可知$a'' = q \vee p_{r+2} \vee \cdots \vee p_n$也是$a$的补元，并且$a'' \neq a'$，即（5）成立．反之，设（5）成立．若$L$非简单格，则$L$亦非既约格，因此有积分解$L = L_1 L_2$．显然$(O_1, I_2) = a \in L$的补元唯一，但$a \neq O$，$I$．与（5）矛盾．故$L$是简单格．▌

由§6.3定理4易知长为1的简单模几何格是仅含两个元的Boole格（Boole代数）．长大于或等于2的简单模几何格是射影几何．因此由§6.4推论4直接可得

定理4 任何模几何格是一个Boole格与一些射影几何的积．▌

设D是任意除环，$V_n(D)$表示D上n维向量空间，则$V_n(D)$的全体向量子空间组成的集合依集合包含关系构成一个格，叫做$V_n(D)$的**子空间格**．

定理5 除环D上n维向量空间$V_n(D)$的子空间格是n维简单模几何格，即$n-1$维射影几何．

证明留作练习．▌

设A是$V_n(D)$的一个向量子空间，$\xi \in V_n(D)$．称$V_n(D)$的子集

$$\xi + A = \{\xi + \eta \mid \eta \in A\}$$

为A对于ξ作的**平移**，称这种形式的子集为$V_n(D)$的**仿射子空间**．

特别地，规定$\varnothing$也是仿射子空间．显然任意多个仿射子空间的交集仍是仿射子空间．

若ξ，$\eta \in V_n(D)$，适合条件$\lambda + \mu = 1$（λ，$\mu \in D$）的线性组合$\lambda\xi + \mu\eta$叫做向量ξ，η的一个**仿射组合**．容易证明下述

定理6 设D是特征不为2的除环，n是大于1的整数，

则$V_n(D)$的非空子集B是一个仿射子空间当且仅当B具有性质

（*） 若ξ，$\eta\in B$，则ξ，η的仿射组合$\lambda\xi+\mu\eta\in B$ （λ，$\mu\in D$，$\lambda+\mu=1$）.

证 必要性显然．下证充分性．设B具有性质（*）．任取$\xi\in B$，令$A=\{b-\xi \mid b\in B\}$．显然$A\neq\varnothing$．对于A中任意向量$\alpha_1=b_1-\xi$，$\alpha_2=b_2-\xi(b_1,\ b_2\in B)$，及$c_1$，$c_2\in D$，易证

$$\alpha=c_1b_1+(1-c_1)\xi\in B,\ \beta=c_2b_2+(1-c_2)\xi\in B.$$

于是
$$\gamma=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\in B,\qquad 2\gamma-\xi\in B.$$
$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2=(2\gamma-\xi)-\xi\in A.$$

因此A是一个向量子空间，并且B是A对于ξ的平移，即B是仿射子空间．▌

如果D的特征为2，上述结论不真．

推论1 $V_n(D)$中（D的特征$\neq 2$）所有含原点（即零向量）的仿射子空间恰是$V_n(D)$的全体向量子空间．

证明留给读者．▌

下面给出一类非模的几何格．

定理7 设D是除环，n维向量空间$V_n(D)$ （$n>1$）的全体仿射子空间关于集合包含关系成为一个$n+1$维非模的几何格（称之为**n维仿射几何**）．

证 令F表示$V_n(D)$的全体仿射子空间组成的集合，显然$(F,\ \subseteq)$构成一个格．设A，$B\in F$，则存在向量子空间A'，B'，使得A，B分别是由A'，B'作的平移．易证在格F中，B覆盖A当且仅当B'覆盖A'．再利用定理6可知，当A，B有公共下邻时，必有公共上邻，因此F是上半模格．对任意$\xi\in V_n(D)$，单点集$\{\xi\}\in F$，并且是格F的原子．由

此可知F是原子格，且其长为$n+1$，即F是$n+1$维几何格. 任取$V_n(D)$的二个向量子空间A，B，使得在格F中，零空间是A的下邻，A是B的下邻. 取一向量$\xi \in B-A$，令$A'=\xi+A$，则$A'\in F$，并且易证B是A，A'的公共上邻. 但是$A'\wedge A=A'\cap A=\varnothing$，因此$A'$与$A$无公共下邻. 故$F$是$n+1$维非模的几何格. ∎

练　　习

1. 试证：在一个有限长的简单模几何格(即射影几何)中，所有的线包含点的个数相同.

2. 证明：若一个模几何格中所有线包含点的个数相同，则它是一个射影几何或有限Boole格.

3. 证明定理2中最后的断言.

4. 补证本节推论1.

5. 证明：任意多个仿射子空间的交集仍是一个仿射子空间.

6. 设$D=Z_2$是特征为2的素域. 证明：

(1) $V_2(Z_2)$的任意子集B都适合定理6中的性质(*)；

(2) $V_2(Z_2)$上任意三元子集都不是仿射子空间.

§6.6　分类格　代数闭子域

本节介绍两类重要的几何格. 首先考虑分类格.

设S是一个非空集合，$\pi(S)$表示S上所有等价关系（或S的分类）组成的集合. 对于任意ρ，$\tau\in\pi(S)$，规定

$$\rho\leqslant\tau \Longleftrightarrow \forall a,\ b\in S,\ a\rho b\text{蕴涵}a\tau b,$$

则$(\pi(S),\ \leqslant)$成为一个格，称之为集合S上的**分类格**.

我们约定，$\rho\in\pi(S)$既表示S的一个等价关系，也表示由ρ决定的S的分类. 不难证明以下事实：

(1) 在分类格$\pi(S)$中，相等关系是零元，全关系是单位元；

(2) 若ρ，$\tau\in\pi(S)$，则$\rho\leqslant\tau\Longleftrightarrow\tau$的等价类是经合并$\rho$的若干等价类而得到；

(3) $\rho\prec\tau\Longleftrightarrow\tau$的等价类是由$\rho$的等价类中仅合并其中两类而得到；

(4) 若ρ，τ的等价类分别为$\rho=\{A_i\}_{i\in W}$，$\tau=\{B_j\}_{j\in T}$，则$\rho\wedge\tau=\{A_i\cap B_j\}_{i\in W,\ j\in T}$(去掉空子集).

由此可证

定理1 集合S上的分类格$\pi(S)$是完备的上半模格.

证 显然$(\pi(S),\ \leqslant)$是完备格. 设$\rho\neq\tau$有公共下邻γ(ρ，τ，$\gamma\in\pi(S)$). 记$\{A_t\mid t\in T\}$是γ的等价类(T为指标集)，则存在i，j，k，$l\in T$，使得$\{i,\ j\}\neq\{k,\ l\}$，且

$$\{B\}\cup\{A_t\mid t\in T-\{i,\ j\}\},\ \text{其中}B=A_i\cup A_j,$$

$$\{D\}\cup\{A_t\mid t\in T-\{k,\ l\}\},\ \text{其中}D=A_k\cup A_l,$$

分别是ρ与τ的等价类. 若$B\cap D=\varnothing$，则S的分类

$$\Omega=\{B,\ D\}\cup\{A_t\mid t\in T-\{i,\ j,\ k,\ l\}\}$$

是ρ，τ的公共上邻. 若$B\cap D\neq\varnothing$，令$C=B\cup D$，则S的分类

$$\Omega'=\{C\}\cup\{A_t\mid t\in T-\{i,\ j,\ k,\ l\}\}$$

是ρ，τ的公共上邻. 故$\pi(S)$是上半模格. ▮

如果S是含n个元素的有限集合，则分类格$\pi(S)$也记作π_n. 显然有以下事实：

(5) 若ρ将S分成的等价类个数记为$l(\rho)$，则ρ在分类

格π_n中的维数$h(\rho)=n-l(\rho)$，从而π_n是长为$n-1$的分次格.

(6)ρ是π_n中的原子$\Longleftrightarrow\rho$的所有等价类中，有且仅有一个类是二元子集，其余皆为S的单元子集，由此可知π_n是原子格.

结合定理1则有

定理2 n个元素的有限集上的分类格π_n是长为$n-1$的几何格. ▌

图6.6.1给出了π_4的示图. 其中

$S=\{1, 2, 3, 4\}$,

$O=\rho_{1,2,3,4}=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$,

$I=\rho_{1234}=\{\{1, 2, 3, 4\}\}$, $\rho_{12}=\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$,

$\rho_{123}=\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$, $\rho_{12,34}=\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$,

其余ρ_{13}, ρ_{14}, ρ_{23}, ρ_{24}, ρ_{34}, ρ_{124}, ρ_{134}, ρ_{234}及$\rho_{13,24}$, $\rho_{14,23}$等可相仿给出.

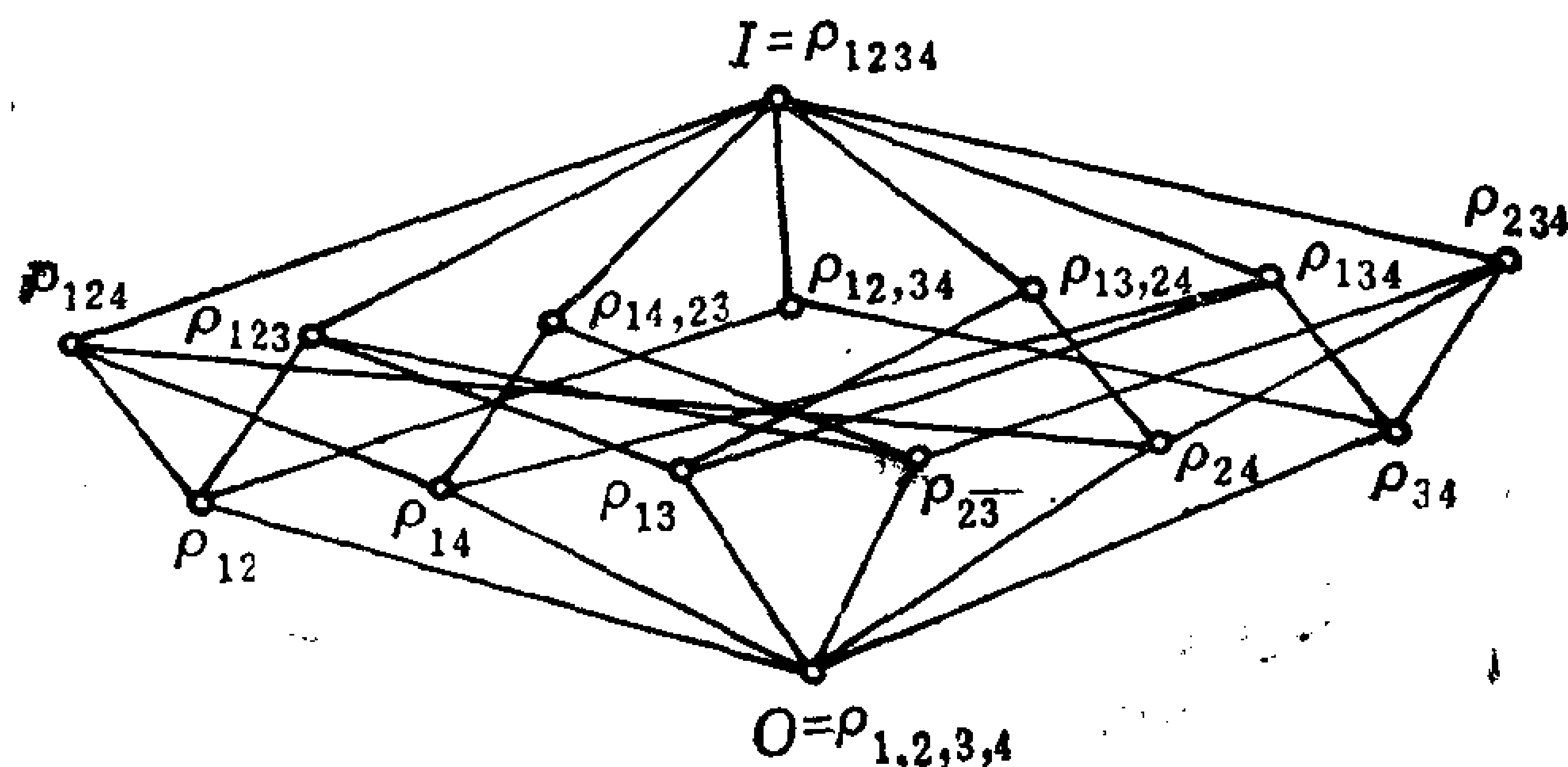


图 6.6.1

在代数数论中产生一种与π_n不同的几何格.

设E是一个域(即E是交换除环), F是E的子域. 任取E的子集S, 用$F(S)$表示E的包含F与S的最小子域, 称为添加S于F得到的**扩域**. 当$S=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$是有限集时, 称$F(S)$是$F$的**有限扩张**, 并记作

$$F(S)=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

特别地, $F(\alpha)$叫做添加α于F得到的**单扩域**. 如果存在F上的多项式$p(x)$使得$p(\alpha)=0$, 则称α是F上的一个**代数元**, 否则α叫做F上的**超越元**(或**代数无关元**). E的子集S叫做在F上**代数无关**的当且仅当任意$\alpha\in S$是$F(S-\{\alpha\})$上的超越元. 若F的扩域E中每一个元素α都是F上的代数元, 则称E是F的**代数扩域**(或**代数扩张**), 否则E叫做F的**超越扩域**(或**超越扩张**). 若任意$\alpha\in E-F$都是F上的超越元, 则称E是F的**纯超越扩域**, F也叫做E的**代数闭子域**. 特别地, 若$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\}$是$F$上的代数无关集, 则$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$是$F$的纯超越扩域. 任意域$E$是自身的一个代数闭子域.

定理3 设$E=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$是域$F$的有限纯超越扩域, 则介于$F$与$E$之间的$E$的代数闭子域$S$(即$F\subseteq S\subseteq E$)的全体依集合包含关系成为长$r$的几何格.

证 记介于F与E之间的全体代数闭子域集合为$\mathscr{E}$, 显然F, $E\in\mathscr{E}$, 并且任意多个代数闭子域的交集仍是一个代数闭子域. 因此$(\mathscr{E}, \subseteq)$构成一个完备格. 若H, K覆盖S $(H, K, S\in\mathscr{E})$, 取$\alpha\in H-S$, $\beta\in K-S$, 则易证

$$H=\{h \mid h\in E\text{且}h\text{是}S(\alpha)\text{上的代数元}\},$$

$$K=\{k \mid k\in E\text{且}k\text{是}S(\beta)\text{上的代数元}\}.$$

令$W=\{z\mid z\in E$且z是$S(\alpha,\ \beta)$上的代数元$\}$，则$W\in\mathscr{E}$. 若有$A\in\mathscr{E}$使得$H\subset A\subseteq W$，取$a\in A-H$，则$a\in W$，因此a是$S(\alpha,\beta)$上的代数元，即存在某一个多项式$p(x_1,\ x_2,\ x_3)$（系数取自S）使得$p(\alpha,\ \beta,\ a)=0$. 由于$a\bar{\in}H$，从而$p(\alpha,\ \beta,\ a)$中必含有β的正数方幂. 由此可知β是$S(\alpha,\ a)$上的代数元，也是A上的代数元，于是$\beta\in A$，并且$A=W$. 这说明W是H的上邻，同理证W也是K的上邻，故$\mathscr{E}$是上半模格. 对于F上的任意超越元$\alpha\in E$，$F(\alpha)$的代数闭包

$$\overline{F(\alpha)}=\{a\mid a\in E\text{且}a\text{是}F(\alpha)\text{上的代数元}\}$$

是$\mathscr{E}$中的原子. 若$G\in\mathscr{E}$，且$F\subset G$，则存在G在F上的一个极大代数无关集$\{\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_t\}$使得$G=\bigvee_{i=1}^{t}\overline{F(\gamma_i)}$，显然$G$的维数$h(G)=t$. 因此$\mathscr{E}$是长为$r$的原子格，从而是长为$r$的几何格. ▮

练　　习

1. 证明本节给出的基本事实(1)—(6).

2. 证明：有限分类格π_n是模格当且仅当$n\leqslant 3$.

3. 试证：含n个元素的集合S的分类个数$\pi(n)$适合递推公式：

$$\pi(n+1)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\pi(i)\quad\left(\text{规定}\binom{n}{0}\pi(0)=1\right).$$

4. 设S是非空集合，θ，θ'是S上可交换的等价关系（即$\theta\theta'=\theta'\theta$，参见§1.4）. 证明：

(1) 在分类格$\pi(S)$中，$\theta M^*\theta'$；

(2) 由S上彼此可交换的等价关系组成的$\pi(S)$的子格是

模格；

(3) 若θ，θ'在$\pi(S)$中是互补元，则集合S与$S/\theta\times S/\theta'$之间存在1-1对应。

第七章　分配格

本章进一步讨论分配格的等价定义和性质(§7.1)、分配格的表示(§7.2)以及无限分配律(§7.3)，最后研究一类特殊的分配格——Brouwer格(§7.4).

§7.1　分配格

分配格的定义及基本性质已在§3.2中简单作了介绍．本节继续这方面的讨论．首先给出分配格的一些等价条件．

定理1　设L是任意格，则下述条件等价：

(1) L是分配格；

(2) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$；$(\forall a, b, c\in L)$

(3) $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$；$(\forall a, b, c\in L)$

(4) $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)$

$=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$；$(\forall a, b, c\in L)$

(5) $a\wedge(b\vee c)\leqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$；$(\forall a, b, c\in L)$

(6) $a\wedge(b\vee c)\leqslant(a\wedge b)\vee c$；　$(\forall a, b, c\in L)$

(7) 若 $a\wedge b=a\wedge c$，$a\vee b=a\vee c$ $(\forall a, b, c\in L)$，则$b=c$；

(8) L不含五元子格M_5与N_5(图7.1.1)；

(9) L的理想格$\hat{L}$是分配格.

证　由§3.2定理2及分配格之定义知(1) $\Longleftrightarrow$ (2).

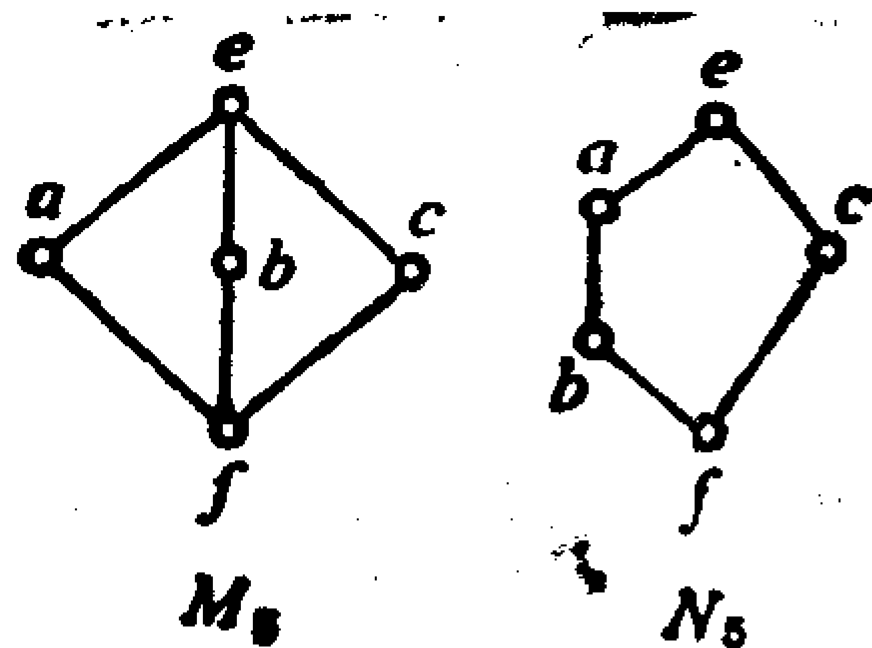


图 7.1.1

$\Longleftrightarrow$(3)．由§3.1推论2知(1)$\Longleftrightarrow$(5)。由§3.4推论5知(1)$\Longleftrightarrow$(9)．由§5.4定理1与推论4易证(1)$\Longleftrightarrow$(7)$\Longleftrightarrow$(8)。显然(3)蕴涵(4)和(6)．反之，若(6)成立，则

$$a\wedge(b\vee c)=a\wedge(a\wedge(b\vee c))$$
$$\leqslant a\wedge((a\wedge b)\vee c)\leqslant(a\wedge b)\vee c,$$

即(5)成立，从而(3)成立．若 (4) 成立，设$c\leqslant a$，则 (4) 中

$$左端=(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee c=(a\wedge b)\vee c,$$
$$右端=(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge a=a\wedge(b\vee c),$$

因而$(a\wedge b)\vee c=a\wedge(b\vee c)$，故$L$是模格。现在对任意$a$，$b$，$c\in L$，令(4)式左端为$u$，右端为$v$，利用模律得

$$a\wedge u=(a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c),$$
$$a\wedge v=a\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)=a\wedge(b\vee c).$$

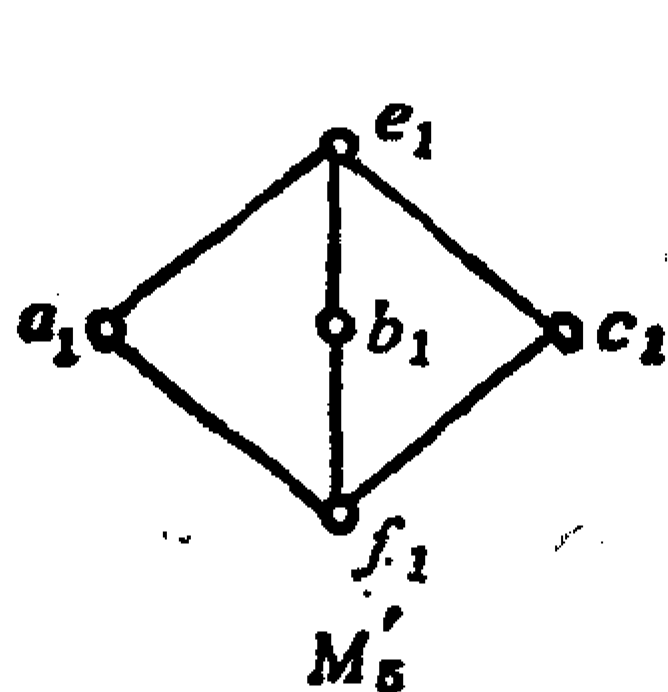
由于$u=v$，因此$a\wedge u=a\wedge v$，即$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$．故(3)成立．▌

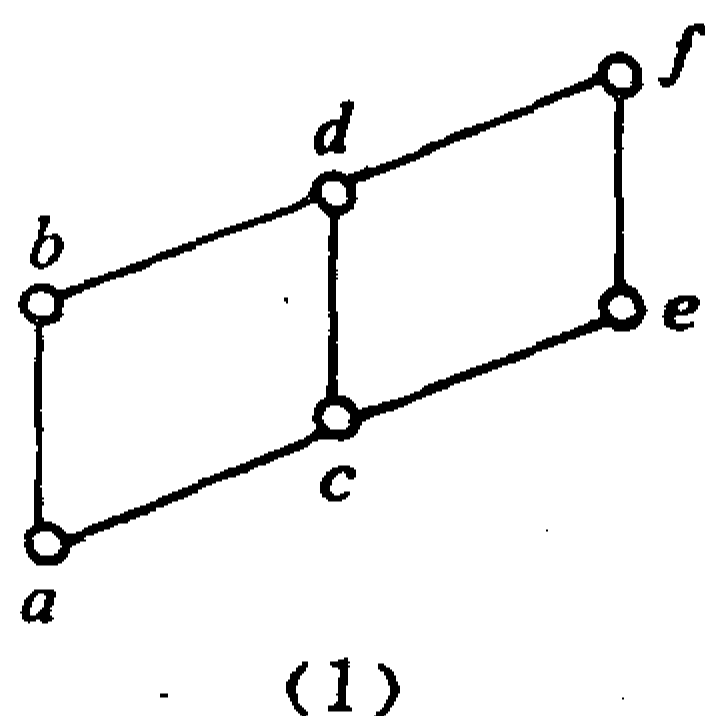
推论1 设L是模格且满足极小条件(或极大条件)．若L不是分配格，则L有五元子格M_5(见图7.1.1)，使得a，b，c有公共上邻e及公共下邻f．

证　设L是非分配的模格且满足极小件条．由定理1知L有五元子格M_5'（如图7.1.2）．显然存在$a\in L$，使得$f_1\prec a\leqslant a_1$．易见$a=(b_1\wedge c_1)\vee(a\wedge(b_1\vee c_1))$，$a\wedge b_1=a\wedge c_1=f_1$，令

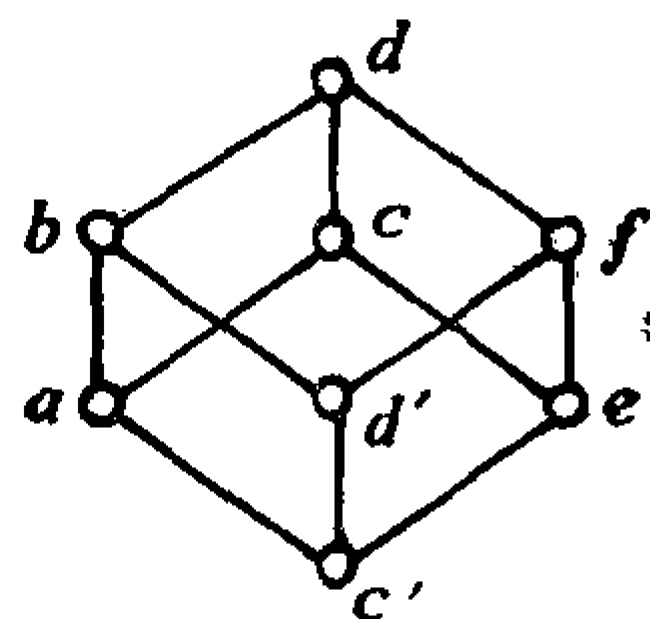
$$b=(c_1\wedge a)\vee(b_1\wedge(c_1\vee a))=b_1\wedge(c_1\vee a),$$
$$c=(a\wedge b_1)\vee(c_1\wedge(a\vee b_1))=c_1\wedge(a\vee b_1),$$
$$e=a\vee b,\quad f=f_1,$$

则由§5.4推论3及§5.1定理1可知$\{a,\ b,\ c,\ e,\ f\}$构成L的一个五元子格M_5(图7.1.1)，并且在L中，a, b, c有公共上邻e及公共下邻f．█





(1)



(2)

图 7.1.2　　　　　　　　图 7.1.3

在格L中，若区间$[a,\ b]$与$[c,\ d]$转置，$[c,\ d]$与$[e,\ f]$转置，且$a\leqslant c\leqslant e$，$b\leqslant d\leqslant f$(见图7.1.3(1))，易证$[a,\ b]$与$[e,\ f]$转置．若L是分配格，且$[a,\ b]$与$[c,\ d]$转置，$[c,\ d]$与$[e,\ f]$转置，且$a\leqslant c$，$e\leqslant c$，$b\leqslant d$，$f\leqslant d$(见图7.1.3(2))，令$c'=a\wedge f$，$d'=b\wedge f$．利用分配律可证$[a,\ b]$与$[c',\ d']$转置，$[c',\ d']$与$[e,\ f]$转置，并且$d'\leqslant b$，$d'\leqslant f$，$c'\leqslant a$，$c'\leqslant e$．

利用Dedekind转置原则（§5.5定理1）及归纳法容易证明下述

定理2 在分配格L中，两个射影区间$[a, b]$，$[e, f]$总可以经过两次转置互相转移，即存在区间$[c, d]$使得$[a, b]$，$[c, d]$转置，$[c, d]$，$[e, f]$转置，并且在映射$x \mapsto (x \vee c) \wedge f$下，$[a, b]$变成$[e, f]$。

证明留作练习. ▮

推论2 在分配格中，一个区间不能与它的真子区间射影。

证 设L是分配格，若L的区间$[y, x]$与其真子区间$[y_1, x_1]$射影($y \leqslant y_1 \leqslant x_1 \leqslant x$)，由定理2知存在区间$[c, d]$，使得$[y, x]$与$[c, d]$转置，$[c, d]$与$[y_1, x_1]$转置，从而

$$x = (x_1 \vee c) \wedge d, \quad y = (y_1 \vee c) \wedge d.$$

于是$x_1 \leqslant x \leqslant d$，$y_1 = y_1 \wedge x_1 \leqslant (y_1 \vee c) \wedge x_1 \leqslant (y_1 \vee c) \wedge d = y$。因此$y_1 = y$，同理证$x_1 = x$，此与$[y_1, x_1]$是$[y, x]$的真子区间矛盾. ▮

下面讨论分配格中元素的既约分解，为此引入强$\vee$-既约元的概念.

设L是任意格，$a \in L$. 若对任意b，$d \in L$，当$a \leqslant b \vee d$时，必有$a \leqslant b$或$a \leqslant d$，则称a是**强$\vee$-既约元**.

显然强$\vee$-既约元一定是$\vee$-既约元. 其逆不真. 但对于分配格二者等价.

定理3 设L是分配格，$a \in L$，则

(1) a是$\vee$-既约元$\Longleftrightarrow a$是强$\vee$-既约元；

(2) 若L有n个相异的非零$\vee$-既约元，则L的维数$h(L) \geqslant n$.

证 (1) 若a是$\vee$-既约元，$a \leqslant b \vee d$，则

$$a = a \wedge (b \vee d) = (a \wedge b) \vee (a \wedge d),$$

于是$a=a\wedge b$或$a=a\wedge d$，即$a\leqslant b$或$a\leqslant d$，故a是强$\vee$-既约元．反之，若a是强$\vee$-既约元，则a显然是$\vee$-既约元．

(2)设a_1，a_2，…，a_n是L中n个相异的非零$\vee$-既约元，适当调整下标可使满足：若$a_i<a_j$，则$i<j$．由(1)知对任意$i=2, 3, \cdots, n$，$a_i\not\leqslant a_1\vee\cdots\vee a_{i-1}$，并且有$a_0\in L$，使

$$a_0<a_1<a_1\vee a_2<\cdots<a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n.$$

因此L的维数$h(L)\geqslant n$．∎

推论3 设L是分配格，U表示L的全体非零$\vee$-既约元组成的集合，Ω_0表示L的全体素对偶理想组成的集合，a是L中任意非零元，则

(1) a是$\vee$-既约元$\Longleftrightarrow$主对偶理想$[a)$是素的；

(2)映射φ：$a\mapsto[a)$是U到Ω_0上的双射．

证明留作练习．∎

在分配格中元素的不可缩$\vee$-既约分解是唯一的．

定理4 设L是分配格，$a\in L$．若a有两种不可缩$\vee$-既约分解

$$a=b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r=c_1\vee c_2\vee\cdots\vee c_s,$$

则$r=s$，并且适当调整下标后，有$b_i=c_i\ (i=1, 2, \cdots, r)$．

证 由§5.6定理3知$r=s$．对任意b_i，显然$b_i\leqslant c_1\vee c_2\vee\cdots\vee c_s$．由定理3知存在$c_j$使得$b_i\leqslant c_j$．同理证存在$b_k$使得$c_j\leqslant b_k$，于是$b_i\leqslant b_k$．因为$a=b_1\vee b_2\vee\cdots\vee b_r$是不可缩$\vee$-既约分解，所以$b_i=b_k$(即$i=k$)，于是$b_i=c_j$，即任意$b_i$一定等于诸$c_j$中的某一项．由于$r=s$且$a=c_1\vee c_2\vee\cdots\vee c_s$是不可缩的$\vee$-既约分解，因此经适当调整下标后，有$b_i=c_i\ (i=1, 2, \cdots, r)$．∎

结合定理3可知，在一个满足极小条件的分配格中，任意元素均可唯一表成一些强$\vee$-既约元之并．反之，有如下结果：

定理5 设L是任意格，若L中每一个元素均可表为一些强$\vee$-既约元之并，则L是分配格．

证 任取a，b，$c\in L$，由假设知有强$\vee$-既约元$p_i\in L$ $(i=1, 2, \cdots, r)$，使得$a\wedge(b\vee c)=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_r$．显然$p_i\leqslant a$且$p_i\leqslant b\vee c(1\leqslant i\leqslant r)$．由于$p_i$是强$\vee$-既约元，因此$p_i\leqslant a\wedge b$或$p_i\leqslant a\wedge c$．从而$p_i\leqslant(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$．于是

$$a\wedge(b\vee c)=p_1\vee p_2\vee\cdots\vee p_r\leqslant(a\wedge b)\wedge(a\wedge c).$$

故由定理1知L是分配格．▌

练　习

1．补证本节定理2及推论3．

2．举例说明在一个格中，$\vee$-既约元未必是强$\vee$-既约元．

3．设L是满足极小条件的模格，且L中任意元的不可缩$\vee$-既约分解唯一，证明L是分配格．

§7.2　分配格的表示

一般格的表示已在§3.6中作了讨论，本节进一步考虑分配格的表示．

由§3.2定理3、§3.4推论1及§2.5定理3直接可得

定理1 设X是任意偏序集，则基数幂2^X是分配格，并且同构于X的J-闭子集环．因此存在分配格2^X按X的一个同构

表示. ▌

由对偶原则得

定理1′ 设X是任意偏序集. X^{-1}是X的对偶，则基数幂$2^{X^{-1}}$是分配格，并且同构于X的M-闭子集环. ▌

下面用B表示二元Boole格$\{O, I\}$.

定理2 设L是非平凡的分配格，则

(1) L是简单格$\Longleftrightarrow L\cong B$；

(2) 若a, $b\in L$且$a<b$，则必有L的素理想J满足：$a\in J$但$b\notin J$.

证 (1)若$L\cong B$，则L显然是简单格. 反之，设L是简单的分配格. 若存在$a\in L$, $a\neq O$, I，则由§3.5推论3知主理想$(a]$是L的标准理想，因而决定了L的一个非平凡格同余关系. 此与假设矛盾，故$L=\{O, I\}=B$.

(2)由于L是分配格，因此映射φ：$x\mapsto(x\vee a)\wedge b$是$L$到区间子格$[a, b]$上的满同态. 利用§3.4练习2可知，存在格满同态ψ：$[a,b]\to B$，于是$\psi\varphi$：$L\to B$是格满同态. 令$\mathrm{Ker}\psi\varphi=J$，则由§3.4推论3知$J$是$L$的素理想，并且$a\in J$，但$b\notin J$. ▌

推论1 任何非平凡的分配格都可以满同态映射到二元格B上. ▌

众所周知，集格一定是分配格. 因此任何具有同构表示的格一定是分配格. 反之，任何分配格一定有同构表示.

定理3（分配格基本定理） 设L是任意格，则L是分配格$\Longleftrightarrow L$可同构表示为一个集格.

证 充分性显然，下证必要性. 设Ω_0是L的全体素对偶理想集合. 由§3.6定理2知映射

$$\Phi: a \mapsto \Phi(a) = \{P \mid P \in \Omega_0 \text{且} a \in P\}$$

给出了L按Ω_0的一个有意表示．若$a \neq b$，则$a \wedge b < a \vee b$．由定理2(2)知存在$P \in \Omega_0$，使得$a \wedge b \overline{\in} P$，$a \vee b \in P$．因此$\Phi(a) \neq \Phi(b)$，从而$\Phi$是单同态，故$L$同构于集格$\Phi(L)$．▌

因此抽象地看，分配格只能是集格．

推论2 若L是满足极小条件的分配格，U表示L的全体非零$\vee$-既约元集合，则映射

$$\Phi': a \mapsto \Phi'(a) = \{b \mid b \in U \text{且} b \leqslant a\}$$

给出了L按U的一个同构表示，其中$\Phi'(a)$是U(作为L的子偏序集)的M-闭子集($\forall a \in L$)．

证 由定理3知完全表示

$$\Phi: a \mapsto \Phi(a) = \{P \mid P \in \Omega_0 \text{且} a \in P\}$$

是同构表示．再由§7.1推论3知$a \mapsto [a)$是U到Ω_0的双射．对于任意$P = [b) \in \Omega_0$及$a \in L$，显然$a \in P = [b) \Longleftrightarrow b \leqslant a$．于是

$$\Phi': a \mapsto \Phi'(a) = \{b \mid b \in U \text{且} b \leqslant a\}$$

给出了L按U的一个同构表示．易见$\Phi'(a)$是U(作为L的子偏序集)的M-闭子集．▌

由定理1可知，在推论2的假设下，L与$2^{U^{-1}}$的子格(2^U的子格)同构(对偶同构)．特别地，若L是有限长的分配格，则由§7.1定理3可知L只有有限个非零$\vee$-既约元，即U是有限集．若A是U的任意M-闭子集，令$a = \bigvee_{x \in A} x$，则易证$\Phi'(a) = A$，因此Φ'是L到U的M-闭子集环上的双射．从而有

定理4 设L是长为n的分配格($n \geqslant 2$)，U是L的全体非零$\vee$-既约元集合，则

(1) L 是有限格，并且 $L\cong 2^{U^{-1}}$（或 L 对偶同构于 2^U）；

(2) U 恰含 n 个元素；

(3) L 恰含 n 个素理想（素对偶理想）.

证明留给读者. ▌

若 L_1，L_2 是两个同构的 n 维分配格，则由上述结果可知，L_1，L_2 的非零 $\vee$-既约元集合 U_1 与 U_2 是两个同构的 n 元偏序集. 反之，若 U_1，U_2 是两个同构的 n 元偏序集，则 $2^{U_1^{-1}}$ 与 $2^{U_2^{-1}}$ 是两个同构的 n 维分配格. 因此有下述结果：

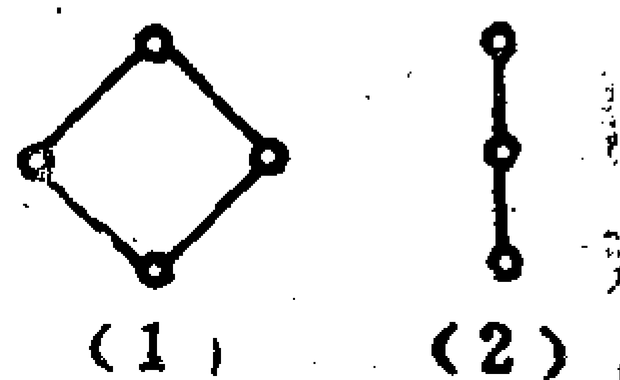


图 7.2.1

定理5 互不同构的 n 维分配格的个数恰等于互不同构的 n 元偏序集的个数. ▌

例如互不同构的2维分配格共有2个（图7.2.1），互不同构的3维分配格共有5个（图7.2.2），互不同构的4维分配格共有16个（练习3），互不同构的5维分配格共有63个.

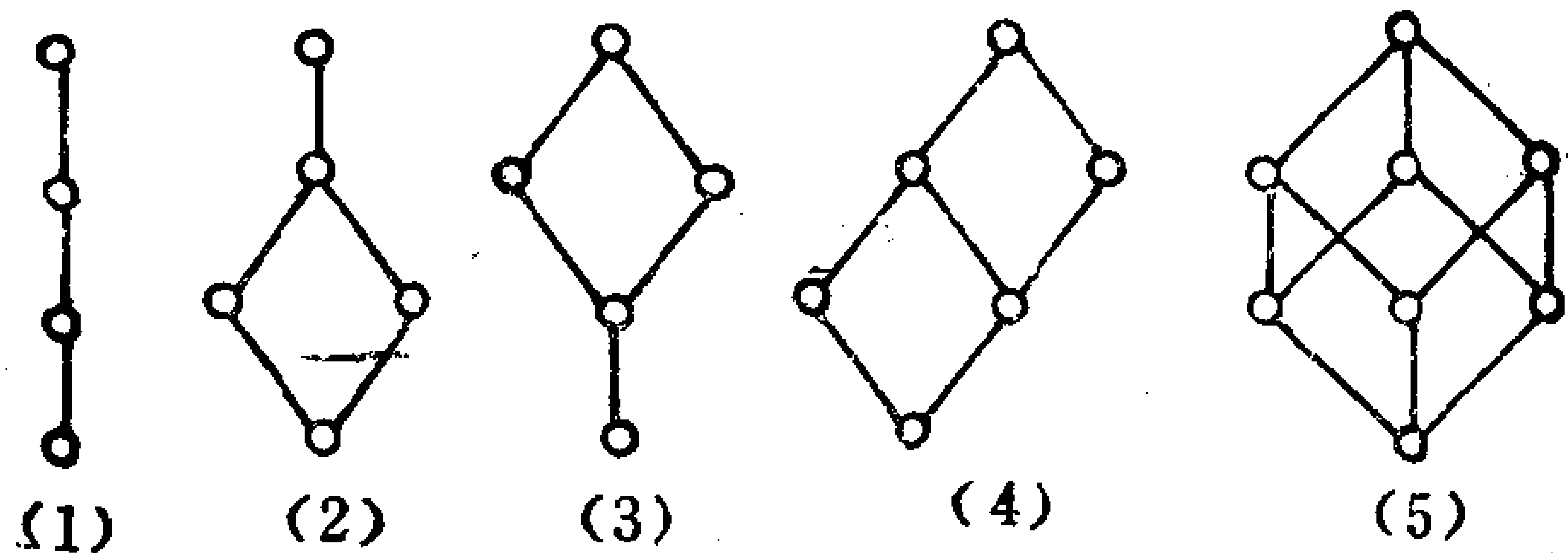


图 7.2.2

练　习

1. 补证定理 4.

2. 证明：n 维Boole格与 n 元集合的幂集格同构.

3. 证明：互不同构的4维分配格共有16个，并画出它们的示图.

§7.3 完全分配格

本节讨论完备格中的分配律.

设L是一个完备格，如果对于任意非空子集$M\subseteq L$及$a\in L$，满足

(1) $a\wedge(\bigvee_{x\in M} x)=\bigvee_{x\in M}(a\wedge x)$，

则称L是$\wedge$-**无限分配格**；对偶地，若对于任意非空子集$M\subseteq L$及$a\in L$，满足

(1)′ $a\vee(\bigwedge_{x\in M} x)=\bigwedge_{x\in M}(a\vee x)$，

则称L是$\vee$-**无限分配格**；若L同时满足(1)与(1)′，则称L是**无限分配格**.

上述(1)与(1)′分别称为$\wedge$-**无限分配律**及$\vee$-**无限分配律**. 显然，$\wedge$-无限分配格和$\vee$-无限分配格一定是分配格. 然而(1)与(1)′并不等价(练习2). 由交换律可得

定理1 在$\wedge$-无限分配格L中，满足

(2) $(\bigvee_{x\in M} x)\wedge(\bigvee_{y\in N} y)=\bigvee_{\substack{x\in M\\ y\in N}}(x\wedge y)$，$(\forall M, N\subseteq L)$，

在$\vee$-无限分配格L中，满足

(2)′ $(\bigwedge_{x\in M} x)\vee(\bigwedge_{y\in N} y)=\bigwedge_{\substack{x\in M\\ y\in N}}(x\vee y)$，$(\forall M, N\subseteq L)$.

证明留作练习. ∎

定理2 任何完备的Boole格一定是无限分配格.

证 设L是完备的Boole格，$\varnothing\neq M\subseteq L$，$a\in L$. 记

$u=\bigvee_{x\in M}(a\wedge x)$，$a'$是$a$的补元，则

$$(a\wedge x)\vee a'\leqslant u\vee a'\quad(\forall x\in M).$$

由分配律

$$(a\wedge x)\vee a'=(a\vee a')\wedge(x\vee a')$$
$$=I\wedge(x\vee a')=x\vee a'.$$

于是 $$x\leqslant x\vee a'\leqslant u\vee a'\quad(\forall x\in M),$$

即 $\bigvee_{x\in M}x\leqslant u\vee a'$，从而

$$a\wedge(\bigvee_{x\in M}x)\leqslant a\wedge(u\vee a')=a\wedge u\leqslant u.$$

再由极小极大原则（§ 3.9 定理6）得 $u\leqslant a\wedge(\bigvee_{x\in M}x)$，故

$$a\wedge(\bigvee_{x\in M}x)=u=\bigvee_{x\in M}(a\wedge x).$$

同理证 $$a\vee(\bigwedge_{x\in M}x)=\bigwedge_{x\in M}(a\vee x).$$

因此L是无限分配格. ∎

一般地，一个完备的分配格未必是无限分配格.

例1 设N^*是全体自然数依数的大小关系构成的线性序集，B表示二元格$\{O,I\}$，则易证$N^*\times B$是分配格，在$N^*\times B$中，添加一个泛界e使得$x<e$（$\forall x\in N^*\times B$），这样得到一个完备的分配格L.易证L满足$\vee$-无限分配律但不满足$\wedge$-无限分配律（练习2）.

下面讨论完全分配律.

称一个完备格L是**完全分配格**，如果L满足**完全分配律**，即对L的任意多个子集族$\{a_{ij}\}_{j\in J_i}$，$i\in I$，$a_{ij}\in L$（I，J_i为下标集），总有

(3) $\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}) = \bigvee\{\bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)} | f\in \prod_{i\in I} J_i\}$.

与 (3′) $\bigvee_{i\in I}(\bigwedge_{j\in J_i} a_{ij}) = \bigwedge\{\bigvee_{i\in I} a_{i,f(i)} | f\in \prod_{i\in I} J_i\}$.

显然完全分配格一定是无限分配格．完全分配格的闭子格仍是完全分配格．一个集合的幂集格是完全分配格．

G.N.Raney证明了下述结果（证明从略）：

定理3 在完备格L中，完全分配律(3)与(3)′彼此等价[3]．▌

推论1 完备格L是完全分配格当且仅当（3）与（3′）之一成立．▌

定理4 任何完备链一定是完全分配格．

证 设L是完备链，$\{x_{ij}\}_{j\in J_i}(i\in I)$是$L$的子集族．令

$$a=\bigwedge_{i\in I}(\bigvee_{j\in J_i} x_{ij}),\quad b=\bigvee\{\bigwedge_{i\in I} x_{i,f(i)} | f\in\prod_{i\in I} J_i\}$$

由极小极大原则知$b\leqslant a$，下面证明$a\leqslant b$．只需注意以下三点：

(i) 若$y<a$ $(y\in L)$，则对任意$i\in I$，存在$j_i\in J_i$，使得$x_{i,j_i}>y$，（否则导出$a\leqslant \bigvee_{j\in J_i} x_{ij}\leqslant y$，矛盾）．

(ii) 若a有下邻y，则(i)中取的x_{i,j_i}必适合$a\leqslant x_{i,j_i}$，于是存在$f\in\prod_{i\in I} J_i$，使得$a\leqslant \bigwedge_{i\in I} x_{i,f(i)}\leqslant b$．

(iii) 若a无下邻，则$a=\bigvee\{y | y\in L$且$y<a\}$．由(i)知对于任意$y<a$，存在$f\in\prod_{i\in I} J_i$，使得$y\leqslant\bigwedge_{i\in I} x_{i,f(i)}$．于是

$$a=\bigvee\{y | y\in L\text{ 且 } y<a\}\leqslant\bigvee\{\bigvee_{i\in I} x_{i,f(i)} | f\in\prod_{i\in I} J_i\}$$

综合上述有$a=b$．故L是完全分配格．▌

最后，利用极小族(或极大族)的概念刻划完全分配格[4]。

设L是完备格，B是L的非空子集，$a\in L$，如果满足条件：

(1)$a=\bigvee_{x\in B}x$；

(2)若$C\subseteq L$，$a\leqslant\bigvee_{y\in C}y$，则对任意$x\in B$，存在$y\in C$，使得$x\leqslant y$；

则称B是a的一个**极小族**。

显然有

定理5 设L是完备格，$a\in L$存在极小族，则a的任意多个极小族的并集仍是a的一个极小族，从而a一定有一个最大的极小族$\beta(a)$，并且$\beta(a)$是L的M-闭子集。

证明留给读者. ▮

定理6 完备格L是完全分配格当且仅当L中每一个元素都有极小族.

证 设L是完全分配格，$a\in L$. 令

$$\mathscr{B}=\{B\mid B\subseteq L,\ 且 a\leqslant\bigvee_{x\in B}x\},$$

显然$\{a\}\in\mathscr{B}$，因此$\mathscr{B}\neq\varnothing$. 将$\mathscr{B}$及$\mathscr{B}$中各集的元素编号：

$$\mathscr{B}=\{B_i\mid i\in I\},\ B_i=\{a_{ij}\mid j\in J_i\}$$

其中I，J_i皆为下标集合. 令

$$A=\left\{\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}\mid f\in\prod_{i\in I}J_i\right\},$$

下面证明A是a的一个极小族.

显然$A\neq\varnothing$，并且由完全分配律易证

$$a=\bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J_i}a_{ij}\right)$$

$$=\bigvee\left\{\bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)} \mid f\in\prod_{i\in I} J_i\right\}=\bigvee_{y\in A} y.$$

若$C\subseteq L$，且$a\leqslant\bigvee_{y\in C} y$，则$C\in\mathscr{B}$，即有$i_0\in I$，使得$C=B_{i_0}$．任取$x=\bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)}\in A(f\in\prod_{i\in I} J_i)$，存在$y=a_{i_0,f(i_0)}\in B_{i_0}=C$，使得$x\leqslant y$．故$A$是$a$的极小族．

反之，设L是完备格，并且任意$a\in L$都有极小族．若$\{a_{ij}\mid j\in J_i\}$ $(i\in I)$是L的子集族，令

$$a=\bigwedge_{i\in I}\left(\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}\right),\quad b=\bigvee\left\{\bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)} \mid f\in\prod_{i\in I} J_i\right\}$$

由极小极大原则知$b\leqslant a$．令$\beta(a)$是a的最大的极小族，对任意$x\in\beta(a)$及$i\in I$，由于$a\leqslant\bigvee_{j\in J_i} a_{ij}$，因此存在某一个$j=f(i)\in J_i$，使得$x\leqslant a_{i,f(i)}$．于是$x\leqslant\bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)}$．故

$$a=\bigvee_{x\in\beta(a)} x\leqslant=\bigvee\left\{\bigwedge_{i\in I} a_{i,f(i)} \mid f\in\prod_{i\in I} J_i\right\}=b.$$

所以$a=b$．因而L是完全分配格．∎

类似地，可以提出**极大族**的概念，并且得出与定理6对偶的结果．同时还可以进一步证明，在完全分配格中每一个元素a存在一个全部由$\vee$-既约元组成的极小族（称为a的**标准极小族**）．

在§10.2中，对于完全分配格将作进一步的讨论．

练　　习

1.补证本节定理1与定理5.

2.验证例1中的结论.

3.证明：平面上所有闭子集关于集合包含关系构成一个$\vee$-无限分配格，但不是$\wedge$-无限分配格.

4. 在集合X的幂集格$P(X)$中，证明：$E \in P(X)$ ($E \neq \varnothing$)的最大极小族.

$$\beta(E) = \{\{x\} \mid x \in E\}.$$

5. 叙述极小族的对偶概念——极大族，并且证明定理5、定理6的对偶命题.

§7.4 Brouwer格

本节介绍一类特殊的分配格——Brouwer格.

设L是一个格，a，$b \in L$. 如果L的子集

$$\{x \mid x \in L, \text{ 且} a \wedge x \leqslant b\}$$

有最大元，则称此最大元是a关于b的**伪补**，记作$b:a$.

下述事实是显然的：

(1) $c = b:a$ ($c \in L$) 当且仅当c满足性质：

$$\forall x \in L, \ x \leqslant c \Longleftrightarrow a \wedge x \leqslant b.$$

(2) 若$a \leqslant b$，则$b:a$存在当且仅当L有单位元I(这时$b:a = I$).

(3) 若$b:a$存在，则$a \wedge (b:a) \leqslant b$.

如果格L中任意两个元素a，b都有伪补$b:a$，则称L是一个**Brouwer格**.

定理1 设L是Brouwer格，则

(1) L有单位元I，并且$a:a = I$ ($\forall a \in L$)；

(2) L一定是分配格.

证 (1)显然. 任取a，b，$c \in L$. 令$p = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$，则$a \wedge b \leqslant p$，$a \wedge c \leqslant p$. 由伪补的定义知$b \leqslant p:a$，$c \leqslant p:a$，从而$b \vee c \leqslant p:a$. 于是

$$a\wedge(b\vee c)\leqslant a\wedge(p:a)\leqslant p.$$

再由分配不等式知$p\leqslant a\wedge(b\vee c)$，因此

$$a\wedge(b\vee c)=p=(a\wedge b)\vee(a\wedge c).$$

故L是分配格，即(2)成立. ∎

下面给出完备的Brouwer格的特征.

定理2 设L是完备格，则L是Brouwer格当且仅当L是$\wedge$-无限分配格.

证 若L是Brouwer格，任取$M\subseteq L$及$a\in L$，令

$$b=\bigvee_{x\in M}(a\wedge x),$$

则$a\wedge x\leqslant b$，$x\leqslant b:a(\forall x\in M)$，即$\bigvee_{x\in M}x\leqslant b:a$，因此

$$a\wedge(\bigvee_{x\in M}x)\leqslant a\wedge(b:a)\leqslant b,$$

再由极小极大原则知$b\leqslant a\wedge(\bigvee_{x\in M}x)$，因此

$$a\wedge(\bigvee_{x\in M}x)=b=\bigvee_{x\in M}(a\wedge x),$$

故L是$\wedge$-无限分配格.

反之，若L是$\wedge$-无限分配格，任取a，$b\in L$. 令

$$M=\{x\mid x\in L,\ 且a\wedge x\leqslant b\},\ c=\bigvee_{x\in M}x.$$

显然$a\wedge c=\bigvee_{x\in M}(a\wedge x)\leqslant b$. 因此$c\in M$，即$c$是$M$的最大元. 于是$b:a=c$存在（$\forall a$，$b\in L$），故$L$是Brouwer格. ∎

存在完备的$\vee$-无限分配格但不是$\wedge$-无限分配格，因而也不是Brouwer格.

推论1 有限分配格是Brouwer格. ∎

推论2 设L是分配格，则L的理想格$\hat{L}$(包括$\varnothing$)是完备的Brouwer格，从而是$\wedge$-无限分配格.

证 由§3.3定理3知$\hat{L}$是完备格. 任取A，$B\in\hat{L}$. 若$A=\varnothing$，则$B:A=L$. 若$A\neq\varnothing$，令

$$C=\{x\mid x\in L,\ 且a\wedge x\in B\ (\forall a\in A)\},$$

显然C是L的理想，并且对任意$D\in\mathcal{L}$，容易证明$D\subseteq C\Leftrightarrow A\cap D\subseteq B$. 因此$B:A=C$. 故$\mathcal{L}$是Brouwer格. ▌

Brouwer格一定有单位元，但未必有零元. 然而任何Brouwer格总可以看成是有零元的格，这是基于下述结果.

定理3 设L是Brouwer格，L^*是由L添加一个零元得到的格，则L^*也是Brouwer格，并且L是L^*的子格.

证明留给读者. ▌

在Brouwer格中，存在一个自然的Galois联络(参见§4.4).

定理4 设L是Brouwer格，取定一个元素$c\in L$，并记$c:a=a^c$ ($\forall a\in L$)，则映射φ: $a\mapsto a^c$是格L的一个对称的Galois联络，即

(1)若$a\leqslant b$ ($a, b\in L$)，则$b^c\leqslant a^c$;

(2)$a\leqslant a^{cc}$ ($\forall a\in L$, $a^{cc}=(a^c)^c$);

进而有

(3)$a^c=a^{ccc}$ ($\forall a\in L$);

(4)$(a\vee b)^c=a^c\wedge b^c$, $(a\wedge b)^c\geqslant a^c\vee b^c$
($\forall a, b\in L$).

证 由定义直接验证知(1)、(2)成立，故φ是L的一个对称的Galois联络. (3)显然成立. 任取$a, b\in L$，由(1)知$(a\vee b)^c\leqslant a^c\wedge b^c$. 另一方面，由于$L$是分配格(定理1)，因此

$$(a\vee b)\wedge(a^c\wedge b^c)=(a\wedge a^c\wedge b^c)\vee(b\wedge a^c\wedge b^c)$$
$$\leqslant(c\wedge b^c)\vee(c\wedge a^c)\leqslant c.$$

于是$a^c\wedge b^c\leqslant(a\vee b)^c$. 故$(a\vee b)^c=a^c\wedge b^c$. 同理可证$(a\wedge b)^c\geqslant a^c\vee b^c$. 因此(4)成立. ▌

由§4.4定理3知对应Φ：$a\mapsto a^{cc}$是格L的一个闭包运算．$a\in L$叫做一个**闭元素**当且仅当$a=a^{cc}$.

定理5 在定理4的假设下，令C表示L中全体闭元素组成的集合，则

(1) C(作为L的子偏序集)是一个分配格．若格C中的交、并运算分别用$\triangle$、$\bigtriangledown$表示，则对任意a，$b\in C$，$a\triangle b=a\wedge b$，$a\bigtriangledown b=(a\vee b)^{cc}$；

(2) $(a\wedge b)^c=a^c\bigtriangledown b^c$（$\forall a$，$b\in L$）；

(3) Φ：$a\mapsto a^{cc}$是L到C上的格满同态．

证 (1)若a，$b\in C$，则$a=a^{cc}$，$b=b^{cc}$．由定理4显然有

$$(a\wedge b)^{cc}\leqslant(a^c\vee b^c)^c=a\wedge b\leqslant(a\wedge b)^{cc}.$$

因此$a\wedge b=(a\wedge b)^{cc}\in C$．易见$a\wedge b$也是$a$，$b$在$C$中的下确界，即$a\triangle b=a\wedge b$．另一方面$(a\vee b)^{cc}\in C$，并且$a\vee b\leqslant(a\vee b)^{cc}$．于是$(a\vee b)^{cc}$是$a$，$b$在$C$中一个上界．若有$d=d^{cc}\in C$是$a$，$b$的一个上界，即$a\leqslant d$且$b\leqslant d$，则$a\vee b\leqslant d$．因此$d^c\leqslant(a\vee b)^c$，$(a\vee b)^{cc}\leqslant d^{cc}=d$．由此可知$(a\vee b)^{cc}$是$a$，$b$在$C$中的上确界，即$a\bigtriangledown b=(a\vee b)^{cc}$，于是$C$是一个格．利用定理1、定理4及下面即证明的(2)可得

$$a\triangle(b\bigtriangledown d)=a^{cc}\wedge(b\vee d)^{cc}=(a^c\vee(b^c\wedge d^c))^c$$
$$=((a^c\vee b^c)\wedge(a^c\vee d^c))^c=(a^c\vee b^c)^c\bigtriangledown(a^c\vee d^c)^c$$
$$=(a^{cc}\wedge b^{cc})\bigtriangledown(a^{cc}\wedge d^{cc})=(a\bigtriangledown b)\bigtriangledown(a\triangle d).$$

因此C是分配格．

(2)若a，$b\in L$，易见$(a\wedge b)^c$，a^c，$b^c\in C$，并且

$$a^c\bigtriangledown b^c=(a^c\vee b^c)^{cc}=(a^{cc}\wedge b^{cc})^c\leqslant(a\wedge b)^c.$$

另一方面，由于$b\wedge b^c\leqslant c$，于是$(a\wedge b)\wedge a^{cc}\wedge b^c\leqslant c$，从而

$(a\wedge b)\wedge a^{cc}\wedge b^{cc}\leqslant c$，由此推得

$$(a\wedge b)^{c}\leqslant(a^{cc}\wedge b^{cc})^{c}=(a^{c}\vee b^{c})^{cc}=a^{c}\triangledown b^{c}.$$

综合上述有 $(a\wedge b)^{c}=a^{c}\triangledown b^{c}$.

(3)Φ显然是满射．由上述结果及定理4易见Φ是格同态．∎

推论3 在定理5中，假定L是完备的Brouwer格，则C及其对偶都是完备的Brouwer格，从而是完备的无限分配格．并且对任意的$A\subseteq L$，

$$(\bigvee_{a\in A} a)^{c}=\bigwedge_{a\in A} a^{c},\quad (\bigwedge_{a\in A} a)^{c}\geqslant\bigvee_{a\in A} a^{c}.$$

当$A\subseteq C$时，则有

$$\mathop{\triangle}_{a\in A} a=\bigwedge_{a\in A} a,\quad \mathop{\triangledown}_{a\in A} a=(\bigvee_{a\in A} a)^{cc}.$$

证 显然C是完备格，并且仿定理4、定理5可证上述各式成立．由于L是分配格，于是对任意$a\in C$及$M\subseteq C$，有

$$a\triangle(\mathop{\triangledown}_{x\in M} x)=a^{cc}\wedge(\bigvee_{x\in M} x)^{cc}=(a\wedge(\bigvee_{x\in M} x))^{cc}$$
$$=(\bigvee_{x\in M}(a\wedge x))^{cc}=\mathop{\triangledown}_{x\in M}(a\wedge x).$$

因此C是$\wedge$-无限分配格，从而C是Brouwer格．类似可证C的对偶亦是完备的Brouwer格．

练　　习

1．证明本节开始给出的事实(1)—(3)．

2．补证本节定理3．

3．证明：

(1)Boole格是Brouwer格；

(2)若L是线性序集，则L是Brouwer格$\Longleftrightarrow L$有泛界I．

4．证明：任意拓扑空间的开子集格是Brouwer格．

5.设L是Brouwer格，a，$c\in L$．证明：

$$a\wedge a^{c}=c\Longleftrightarrow c\leqslant a.$$

6.举例说明本节定理4（4）中，有可能使

$$(a\wedge b)^{c}\neq a^{c}\vee bc$$

第八章　Boole格

本章主要讨论Boole格（§8.1）与Boole环（§8.2）的有关性质、Boole格的表示（§8.3）以及Boole函数（§8.4）。

§8.1　Boole格

Boole格就是有补的分配格，其中任意元素a的补元是唯一的，记作a'。因此一个Boole格可以看成是一个带有两个二元运算（交、并）和一个一元运算（补）的代数系统，称之为Boole**代数**。

Boole格的简单性质已由§3.2定理8给出。由该定理的(2)及(3)可知，映射$a\mapsto a'$是Boole格的一个自对偶同构。事实上，这也是Boole格的特征性质。

定理1　设L是有泛界O，I的格，则L是Boole格当且仅当L中每一个元素a都有唯一补元a'，并且映射$a\mapsto a'$是L的一个自对偶同构。

证　只须证充分性。设L满足上述条件，任取a，$b\in L$，则$(a\wedge b)'=a'\vee b'$，$(a\vee b)'=a'\wedge b'$，$(a'\wedge b)'=a\vee b'$。不妨假定$a\leqslant b$。由模不等式得$(a'\wedge b)\vee a\leqslant b$，于是

$$((a'\wedge b)\vee a)\wedge b'=O,\quad ((a'\wedge b)\vee a)\vee b'=I,$$

即$(a'\wedge b)\vee a$是b'的补元。由唯一性得$(a'\wedge b)\vee a=b$，同

理$(a\vee b')\wedge b=a$. 若$x\in[a, b]$,则由模不等式及上述结果易证$b\wedge(x'\vee a)$是x在$[a, b]$内的相对补元. 若$y\in[a, b]$也是x的相对补元, 即$y\wedge x=a$, $y\vee x=b$, 令$d=b'\vee(x\wedge a')$, 则由上述结果得

$$d\wedge y=(b'\vee(x\wedge a'))\wedge b\wedge y=(x\wedge a')\wedge y=O.$$

$$d\vee y=b'\vee(x\wedge a')\vee a\vee y=b'\vee x\vee y=I.$$

因此$y=d'=b\wedge(x'\vee a)$. 这说明x在$[a, b]$内的相对补元唯一. 由§7.1定理1(7)知L是分配格. 从而是Boole格. ▮

定理2 Boole格一定是Brouwer格.

证 设L是Boole格, $a, b\in L$. 显然$a\wedge(a'\vee b)=a\wedge b\leqslant b$. 若$x\in L$且$a\wedge x\leqslant b$, 则

$$x\leqslant a'\vee x=a'\vee(a\wedge x)\leqslant a'\vee b.$$

因此$a'\vee b=b:a$. 故L是Brouwer格. ▮

Boole格的例子是很多的. 例如集合X上的幂集格$P(X)$是Boole格, 分配格(带有泛界O, I)中全体有补元构成一个Boole格(§3.2定理9), 偏序集(带有泛界O, I)的中心是一个Boole格(§3.7定理2).

在§7.4定理4、定理5中, 若L是一个完备的Brouwer格, 取$c=O$, 且记$a^c=a^*$,

$$C=C^*=\{a\mid a\in L, \text{且}a=a^{**}\},$$

则有下述

定理3 设L是完备的Brouwer格, 则

(1)闭元素格C^*是完备的Boole格;

(2)映射Φ: $a\mapsto a^{**}$是L到C^*上的格满同态;

(3)对任意$a, b\in L$, $a^{**}=b^{**}\Longleftrightarrow$存在$d\in L$, 使得

$d^{**}=I$，且$a\wedge d=b\wedge d$（称d为稠密元）．

证 (1)由§7.4推论3知C^*是完备的分配格．对于任意$a\in C^*$，易见a^*是a在格C^*内的补元，故C^*是Boole格．

(2)由§7.4定理5直接可得．

(3)设$a,b\in L$．若$a^{**}=b^{**}$，令$d=(a\vee b^*)\wedge(a^*\vee b)$，则由§7.4定理4，定理5得

$$\begin{aligned}d^{**}&=(a\vee b^*)^{**}\wedge(a^*\vee b)^{**}=(a^*\wedge b^{**})^*\wedge(a^{**}\wedge b^*)^*\\&=(a^{**}\nabla b^*)\wedge(a^*\nabla b^{**})=(b^{**}\nabla b^*)\wedge(a^*\nabla a^{**})\\&=I,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a\wedge d&=a\wedge(a\vee b^*)\wedge(a^*\vee b)=a\wedge(a^*\vee b)\\&=(a\wedge a^*)\vee(a\wedge b)=a\wedge b.\end{aligned}$$

反之，若$a\wedge d=b\wedge d$，$d^{**}=I(d\in L)$，则$a^{**}=a^{**}\wedge I=a^{**}\wedge d^{**}=(a\wedge d)^{**}=(b\wedge d)^{**}=b^{**}$．∎

推论1 设L是Boole格，则L按切割的完备化$\mathscr{L}(L)$（见§4.5）是完备的Boole格，并且映射：$J\mapsto J^{**}$是L的非空理想格$\hat{L}$到$\mathscr{L}(L)$上的格满同态．

证 由§7.4推论2知L的理想格$\hat{L}$是完备的Brouwer格．易证L的非空理想格$\hat{L}$也是完备的Brouwer格．L的每一个切割都是L的一个闭理想，因此$\mathscr{L}(L)\subseteq\hat{L}$．若$A\in\hat{L}$，记$A'=\{a'\mid a\in A\}$，易证$A^*=\{O\}:A=M_lA'$，于是$A^{**}=M_l((M_lA')')$．由此推得

$$\begin{aligned}a\in A^{**}&\Longleftrightarrow a\leqslant b'\quad(\forall\, b\in M_lA')\\&\Longleftrightarrow a\leqslant b'\quad(\forall\, b'\in M_aA)\\&\Longleftrightarrow a\in M_lM_aA.\end{aligned}$$

故$A=A^{**}\Longleftrightarrow A=M_lM_aA$，即$\mathscr{L}(L)$恰是完备的Brouwer格$\hat{L}$在定理3意义下的闭元素集．由定理3可知$\mathscr{L}(L)$是完备

的Boole格，并且$J\mapsto J^{**}$是L到$\mathscr{L}(L)$上的格满同态．▌

练　　习

1．证明：每一个元素都有唯一补元的模格是Boole格．

2．证明：有限长的分配原子格是Boole格．

3．设A是带有一个同二元运算"$\vee$"及一元运算"$'$"的代数系．定义$a\wedge b=a'\vee b'$（$\forall a, b\in A$）．若满足：

(1) $a\vee b=b\vee a$；

(2) $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$；

(3) $(a\wedge b)\vee(a\wedge b')=a$　（$\forall a, b, c\in A$）；

证明：$(A, \wedge, \vee, ')$成为一个Boole代数．

§8.2　Boole环

本节讨论与Boole格密切相关的代数系——Boole环．

带有两个二元运算"+"(加法)与"·"(乘法)的代数系$(R, +, \cdot)$叫做一个**环**，如果$(R, +)$是交换群，$(R, \cdot)$是半群，并且乘法对加法满足左、右分配律，即适合以下算律：

(1) $a+b=b+a$；

(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$，　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

(3) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$；

(4) 存在一个元素$0\in R$，使得$0+a=a+0=a$（$\forall a\in R$），称此元素0为**零元**；

(5) $\forall a\in R$，存在$b\in R$，使得$a+b=b+a=0$，称b

为a的**负元**，记为$b=-a$.

若$e\in R$，R是环，且对任意$a\in R$，有$e\cdot a=a\cdot e=a$，则称e是R的**单位元**（或**恒等元**）. 常记$e=1$.

设R是环，R中两元a，b的乘积$a\cdot b$也简记为ab. 若R中乘法满足交换律，即$ab=ba$（$\forall a, b\in R$），则称环R为**交换环**. 若$a^2=aa=a$，则称a是**幂等元**.

例如全体整数Z关于数的加法和乘法构成一个有单位元的交换环，其中数0是零元，数1是单位元. 0，1是Z中仅有的幂等元.

环R叫做一个Boole**环**，如果R有单位元，并且R中每一个元素都是幂等元.

定理1 设R是Boole环，则

(1) $a+a=0$（即$a=-a$），$\forall a\in R$；

(2) $ab=ba$，$\forall a, b\in R$.

证 (1)对任意a，$b\in R$，有$a^2=a$，$b^2=b$，

$$(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a+ab+ba+b=a+b.$$

于是$ab+ba=0$. 特别取$a=b$，则$ab=ba=a^2=a$，因此$a+a=0$.

(2)由（1）知 $ab+ab=0=ab+ba$，于是 $ab=ba$. ▮

推论1 Boole环是特征为2的交换环. ▮

Boole格与Boole环有密切的联系.

定理2 设L是Boole格，O，I是泛界. 在L中如下定义加法与乘法：

$$a+b=(a\wedge b')\vee(a'\wedge b),\quad ab=a\wedge b.$$

则L成为一个Boole环，其中泛界O，I分别是环L的零元与

单位元.

证 任取a, b, $c\in L$, 易见

(1)$a+b=b+a$;

$$(2)\ (a+b)+c=(((a\wedge b')\vee(a'\wedge b))\wedge c')\vee(((a\wedge b')\vee(a'\wedge b))'\wedge c)$$
$$=(a\wedge b'\wedge c')\vee(a'\wedge b\wedge c')\vee(a'\wedge b'\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c),$$

同理证 $$a+(b+c)=(a\wedge b'\wedge c')\vee(a'\wedge b\wedge c')\vee(a'\wedge b'\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge c).$$

故 $(a+b)+c=a+(b+c)$. 类似证 $(ab)c=a(bc)$.

$$(3)\ a(b+c)=a\wedge((b\wedge c')\vee(b'\wedge c))=(a\wedge b\wedge c')\vee(a\wedge b'\wedge c).$$

$$ab+ac=((a\wedge b)\wedge(a\wedge c)')\vee((a\wedge b)'\wedge(a\wedge c))=(a\wedge b\wedge c')\vee(a\wedge b'\wedge c).$$

于是 $a(b+c)=ab+ac$. 同理证 $(b+c)a=ba+ca$.

(4)$a+O=O+a=a$, $\forall a\in L$, 即O是零元.

(5)$a+a=O$, $\forall a\in L$, 即a的负元是a.

故L是环. 显然$Ia=aI=a$, $\forall a\in L$. 即I是L的单位元, 并且$a^2=aa=a$. 故L是Boole环. ∎

这样给定一个Boole格L, 就可以得到一个Boole环L, 格运算与环运算之间有如下关系:

推论2 在定理2中, 对任意a, $b\in L$, 有

(1)$a'=a+I$, (2)$a\vee b=a+b+ab$.

证 (1)$a+I=(a\wedge I')\vee(a'\wedge I)=a'$.

(2)因I是环L的单位元, 于是由(1)知

$$a+b+ab=a+Ib+ab=a+a'b=a+a'\wedge b$$

$= (a \wedge (a' \wedge b)') \vee (a' \wedge (a' \wedge b))$

$= (a \wedge (a \vee b')) \vee (a' \wedge b)$

$= a \vee (a' \wedge b) = a \vee b$. ▌

反之，给定一个Boole环，也可以得到一个Boole格.

定理3 设$(R, +, \cdot)$是一个Boole环，0，1分别是零元及单位元. 在R中如下定义$\wedge$、$\vee$运算：

$$a \wedge b = ab, \quad a \vee b = a + b + ab,$$

则$(R, \wedge, \vee)$成为一个Boole格（即Boole代数），其中0，1是R的泛界，$a' = a + 1$是a的补元.

证 由推论1知$(R, +, \cdot)$是交换环，因此对任意$a, b, c \in R$，有

(1) $a \wedge b = b \wedge a$，$a \vee b = b \vee a$；

(2) $a \wedge a = a$，$a \vee a = a$；

(3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$，

$$(a \vee b) \vee c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c$$
$$= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = a \vee (b \vee c).$$

(4) $a \wedge (a \vee b) = a(a + b + ab) = a^2 + ab + a^2b = a$.

同理证 $a \vee (a \wedge b) = a$. 因此$(R, \wedge, \vee)$是格.

(5) $a \wedge (b \vee c) = a(b + c + bc) = ab + ac + abc$

$$= ab + ac + abac = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

因而$(R, \wedge, \vee)$是分配格.

(6) 由于$a \wedge 0 = 0$，$a \wedge 1 = a$（$\forall a \in R$），因此0，1是格R的泛界. 并且

$a \wedge (a + 1) = a(a + 1) = a^2 + a = 0$，

$a \vee (a + 1) = a + (a + 1) + a(a + 1) = 1$.

即$a + 1$是a在格R中的补元，故$(R, \wedge, \vee)$是Boole格. ▌

推论3　在定理3中，对任意a，b，$c\in R$，

$$a+b=(a\wedge b')\vee(a'\wedge b).$$

证　由定理3知

$$\begin{aligned}&(a\wedge b')\vee(a'\wedge b)\\&=a(1+b)+(1+a)b+a(1+b)(1+a)b\\&=a+ab+b+ab+ab+a^2b+ab^2+(ab)^2=a+b.\ \blacksquare\end{aligned}$$

由以上结果可知，Boole格与Boole环是等价的 代 数 系统.

练　　习

1.在本节定理2中，证明：

(1)　$a+b=(a\wedge b')\vee(a'\wedge b)=(a\vee b)\wedge(a\wedge b)'$；

(2)　$a+b$是$a\wedge b$在$[O,\ a\vee b]$内的相对补元.

2.设R是有单位元的交换环. 证明：R中所有幂等元(关于R中的加法和乘法)构成一个Boole环.

3.环R的理想是指R的非空子集J，满足：(1)若a，$b\in J$，则$a-b\in J$；(2)若$a\in J$，$r\in R$，则ar，$ra\in J$. 证明：在定理3中，R的非空子集J是环R的理想$\Longleftrightarrow J$是格R的理想.

§8.3　Boole格的表示

本节讨论Boole格的表示. 显然§7.2中有关分配格表示的诸结论对于Boole格皆适用. 若L是一个Boole格，令

$$\Omega_0=\{P\mid P\text{是}L\text{的素对偶理想}\},$$

则映射Φ：$a\mapsto\Phi(a)=\{P\mid P\in\Omega_0, a\in P\}$给出$L$按$\Omega_0$的一个

同构表示（§7.2定理3）。易见$\Phi(O)=\varnothing$，$\Phi(I)=\Omega_0$，并且$\Phi(L)=\{\Phi(a)\mid a\in L\}$是$\Omega_0$的幂集格的一个有补子格，即$\Phi(L)$是$\Omega_0$上的一个有补集格。反之，任何集合上的有补集格一定是Boole格。因此有

定理1 设L是任意格，则L是Boole格当且仅当L可同构表示为某集合上的一个有补集格. ▮

Boole格显然是分段有补格，其中原子元等价于$\vee$-既约元（§6.1定理1）. 若用U表示全体$\vee$-既约元（即原子）组成的集合，则U作为子偏序集显然是反链，从而U的每一个子集都是M-闭子集，于是由§7.2定理4得

定理2 设L是n维Boole格，则

(1) L恰有n个不同的原子$p_1,p_2,\cdots,p_n$；

(2) L同构于n元集$U=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$的幂集格. ▮

推论1 在同构意义下，n维Boole格只有一个（即2^n），它有2^n个元素. ▮

完备的Boole格是无限分配格（§7.3定理2），但是一般地未必是完全分配格.

定理3（A. Tarski） 设L是完备的Boole格，则下述条件等价：

(1) L是完全分配格；

(2) L是原子格；

(3) L同构于某集合上的幂集格.

证 (1)⇒(2). 设L是完全分配格. 对任意$a\in L$，令$T_a=\{a,a'\}$，则$\bigvee\limits_{x\in T_a}x=I$. 于是

$$I=\bigwedge_{a\in L}\left(\bigvee_{x\in T_a}x\right)=\bigvee\left\{\bigwedge_{a\in L}f(a)\mid f\in\prod_{a\in L}T_a\right\}.$$

记$x_f = \bigwedge_{a\in L} f(a)$，$f \in \prod_{a\in L} T_a$．若有$b \leqslant x_f$，且$b \neq O$ $(b \in L)$，则显然有$f(b) \geqslant x_f \geqslant b > O$．由此推出$f(b) = b$（否则，$f(b) = b' \geqslant b$，导出$b = b \wedge b' = O$，矛盾），从而$x_f = b$．因此$x_f$或为零元，或为原子．由上述$I$的表达式可知，$I$可表为一些原子的并，即存在由原子组成的集合$T$，使得$I = \bigvee_{p\in T} p$.对任意$a \in L$，由完全分配律得

$$a = a \wedge I = \bigvee_{p\in T} (a \wedge p),$$

其中$a \wedge p$ $(p \in T)$或为零元，或为原子（等于p），即a可表为一些原子的并，故L是原子格.

(2)⇒(3)．设(2)成立，记T是L的所有原子组成的集合．若$a \in L$，令

$$\varphi(a) = \{p \mid p \in T,\ 且 p \leqslant a\}.$$

则φ：$a \mapsto \varphi(a)$是L到T的幂集格$P(T)$的映射．显然$\varphi(O) = \varnothing$．若$A \subseteq T$，$A \neq \varnothing$，令$a = \bigvee_{p\in A} p$，则易证$p \leqslant a$ $(p \in T)$ $\Longleftrightarrow p \in A$，因此$\varphi(a) = A$，故$\varphi$是满射．由于$L$是原子格，若$a \neq b$，$a, b \in L$，必有$\varphi(a) \neq \varphi(b)$，即$\varphi$是单射．于是$\varphi$是双射．显然$\varphi(a) \subseteq \varphi(b) \Longleftrightarrow a \leqslant b$，因此$\varphi$是序同构，从而是格同构．故(3)成立.

(3)⇒(1)．显然．▌

由§7.3定理4知道，任何完备链是完全分配格，但不是有补格．因此有以下推论.

推论2 (Raney)　完全分配格中包括许多非Boole格．▌

将定理3的条件变通一下，则有

定理4　设L是完备的原子格，则下述条件等价：

(1) L是Boole格；

(2) L 是完全分配格；

（3）L 中每一个元素有唯一的补元；

（4）L 同构于某集合的幂集格.

证 由定理3知(4)⇒(1)及(1)⇒(2)成立.

(2)⟹(3). 设(2)成立. 记 T 是 L 的所有原子组成的集合. 由于 L 是原子格，因此 $I=\bigvee_{p\in T}p$. 任取 $a\in L$ 及 $p\in T$，则 $p\wedge a=O$，或者 $p\leqslant a$. 记

$$T_a=\{p\mid p\in T,\ 且 p\leqslant a\},$$

则 $a=\bigvee_{p\in T_a}p$. 若 $a=I$，则 a 有补元 O. 若 $a\neq I$，则 $T-T_a\neq\varnothing$. 令 $b=\bigvee_{p\in T-T_a}p$，易见 $a\vee b=I$，$a\wedge b=O$，即 b 是 a 的补元. 而 L 是分配格，因此每一个元素的补元唯一. 于是(2)蕴涵(3).

(3)⇒(4). 设(3)成立，T，T_a $(a\in L)$ 意义同上. 任取 $p\in T$，设有 $x\in T$，使得 $p'\leqslant x\leqslant I$（p' 是 p 的补元）. 若 $p\leqslant x$，则 $I=p'\vee p\leqslant x$，于是 $x=I$. 若 $p\nleqslant x$，则 $x\wedge p=O$，另外由 $p'\leqslant x$ 可知 $x\vee p=I$，即 x 是 p 的补元. 由假设知 $x=p'$，因此 p' 是 I 的下邻（$\forall p\in T$）. 若 $p,q\in T$，$p\neq q$，由上述结果易证 $p\leqslant q'$（否则，$q'<p\vee q'=I$，导出 $p'=q'$，从而 $p=q$，矛盾）. 由于 L 是原子格，易见当 $a\neq b$ 时，必有 $T_a\neq T_b$，若 $A\subseteq T$，记 $a=\bigvee_{p\in A}p$. 设有 $q\in T$，但 $q\overline{\in}A$，则 $p\leqslant q'$ $(\forall p\in A)$，从而 $a=\bigvee_{p\in A}p\leqslant q'$，由此可知 $q\nleqslant a$. 于是推出 $T_a=A$，故映射 φ: $a\mapsto T_a$ 是 L 到 T 的幂集格 $P(T)$ 上的双射. 显然 $T_a\subseteq T_b\Longleftrightarrow a\leqslant b$，故 φ 是格同构，因此(4)成立. ▌

事实上，将定理 4 中 L 是原子格的条件换成 I 是原子的并，相应的结论仍成立(练习1).

由定理4直接可得

推论3 设L是长为n的格，则下述条件等价：

(1) L是Boole格；

(2) L是分配格，且I是原子的并；

(3) L中每一个元有唯一补元；

(4) L同构于n元集的幂集格.

证明留作练习. ▮

练　　习

1. 设L是Boole格，证明下述条件等价：

(1) L是原子格；

(2) I是原子的并；

(3) L中每一个非零元都包含一个原子.

利用上述结果说明在定理3或定理4中，将条件"L是原子格"换成上述(2)或(3)，相应的结论仍成立.

2. 证明本节推论3.

3. 设L是有补格，并且满足：若$a, x\in L$，$a\wedge x=O$，则$x\leqslant a'$. 证明：

(1) L中每一个元的补元唯一；

(2) 若$a\leqslant b\,(a, b\in L)$，则$a\wedge b'=O$，且$b'\leqslant a'$；

(3) L是Boole格.

§8.4 Boole函数

本节讨论定义在一个Boole格上的函数——Boole函数.

设B是一个给定的Boole格. 称B中的元素为**常量**，若x_1，x_2，…，x_n是一些未定元(变量)，利用交、并、补符号

(即$\wedge$，$\vee$，$'$)把这些变量及一些常量连接而成的式子叫做B上的Boole**式**. 确切地可定义如下：

(1)每一个变量或常量都是一个Boole式；

(2)若p，q是Boole式，则p'，$p\wedge q$，$p\vee q$也是Boole式；

(3)每一个Boole式都以确定的方式给出(即诸常量及变量按确定的顺序用$\wedge$，$\vee$，$'$符号经有限次连接起来).

含有n个变量的Boole式叫做n**元Boole式**，常记作$p(x_1, x, \cdots, x_n)$. 这时若用B中任意n个元素a_1，a_2，$\cdots$，a_n代换诸变量，则得到B中一个元素$p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 因此每一个n元Boole式表示了B上的一个n元函数，叫做n元Boole**函数**.

称两个Boole函数p与q**相等**或**恒等**(记作$p=q$)，当且仅当利用Boole格的诸算律(如关于交、并、补的交换律、结合律、分配律、吸收律、De Morgan律等等)由其中一个可推出另一个.

习惯上常将$p\wedge q$记作pq. 若一个Boole式不出现符号"$\vee$"(即诸变量及常量只用符号$\wedge$，$'$连结)，则称之为**单项式**. 显然每一个Boole式可表成(即恒等于)若干单项式之并，而且任意变元x及x'在每一个单项式中不同时出现(否则，由于$xx'=x\wedge x'=O$，该项可以去掉). 例如二元Boole函数$f(x, y)$总可表为下述形式：

$$f(x,y)=a_1\vee a_2x\vee a_3y\vee a_4x'\vee a_5y'\vee a_6xy'\vee a_7x'y \vee a_8x'y'\vee a_9xy, \qquad (a_i\in B, i=1,2,\cdots,9).$$

下面研究一元Boole函数.

设B是给定的Boole格，$f(x)$是B上的一元Boole函数.

显然$f(x)$可表为

$$f(x)=a_1x\vee b_1x'\vee c_1, \qquad (a_1,\ b_1,\ c_1\in B).$$

由于$c_1=c_1I=c_1(x\vee x')=c_1x\vee c_1x'$，代入上式得

$$f(x)=px\vee qx', \tag{8.4.1}$$

其中$p=a_1\vee c_1$，$q=b_1\vee c_1$. 称式(8.4.1)是$f(x)$的**正规式.**

由§8.2知道，Boole格B可确定一个Boole环，其中$a\vee b=a+b+ab$，$a'=I+a$. 于是

$$\begin{aligned}px\vee qx'&=px+qx'+pxqx'=px+qx'\\&=px+q(I+x)=q+(p+q)x,\end{aligned}$$

即

$$f(x)=a+bx \tag{8.4.2}$$

其中$a=q$，$b=p+q$. 式(8.4.2)叫做$f(x)$的**加法式.**

能使$f(a)=O$的元素$a\in B$叫做$f(x)$的**零点**，或称为**方程$f(x)=O$的解.**

对于$a,b\in B$，给定方程

$$a+bx=O \tag{8.4.3}$$

则称方程

$$bx=O \tag{8.4.4}$$

是方程(8.4.3)的**导出齐次方程.**

定理1 方程(8.4.3)有解的充分必要条件是$a\leqslant b$. 当此条件满足时，该方程的全部解为$x=a+z$，($\forall z\leqslant b'$).

分以下几个命题证明.

命题1 方程(8.4.3)有解$\Longleftrightarrow a\leqslant b$.

证 由于方程(8.4.3)与方程$bx=a$同解，故命题显然成立. ▮

命题2 若$u,v\in B$是方程(8.4.3)的两个解，则$u+v$是其导出齐次方程(8.4.4)的解.

证 设$a+bu=O$，$a+bv=O$，因此$a=bu=bv$，于是$b(u+v)=bu+bv=a+a=O$，即$u+v$是齐次方程(8.4.4)的解．▌

命题3 方程(8.4.3)的每一个解y均可表为a与(8.4.4)的一个解z之和(即$y=a+z$)．

证 设方程(8.4.3)有解，则$a\leqslant b$．显然a是该方程的一个解．若y是(8.4.3)的任意一个解，由命题2知$z=a+y$是(8.4.4)的一个解．于是$y=a+z$(因为$a+a=O$)．▌

命题4 齐次方程(8.4.4)与方程

$$b'x=x \tag{8.4.5}$$

同解，并且$\{y \mid y\in B, 且 y\leqslant b'\}$是方程(8.4.5)的全部解．

证 因为$b'=I+b$，于是$b'x=x+bx$，故$bx=O$当且仅当$b'x=x$．最后的断言是显然的．▌

综合上述可知定理1成立．

推论1 在定理1中，设$a\leqslant b$，则下述条件等价：

(1)方程$a+bx=O$有唯一解；

(2)$b'=O$；

(3)$b=I$；

(4)映射$x\mapsto f(x)=a+bx$是B上的双射．

证明留给读者．▌

下面讨论一元函数$f(x)=px\vee qx'$的值域．

定理2 设B是Boole格，$p,q\in B$，则一元Boole函数$f(x)=px\vee qx'$的值域充满区间$[pq,p\vee q]$，即

$$f(B)=\{a \mid a\in B, 且 p\wedge q\leqslant a\leqslant p\vee q\}.$$

证 若$b\in B$，显然$f(b)=pb\vee qb'\leqslant p\vee q$．又因

$$pq=pq(b\vee b')=pqb\vee pqb'\leqslant pb\vee qb'=f(b),$$

故$f(b)\in[pq,\ p\vee q]$. 若$z\in[pq,\ p\vee q]$，则有$pqz=pq$,

$$z=z(p\vee q)=z(p+q+pq)=pq+z(p+q),$$

从而 $$q+z=(q+z)(p+q)\leqslant p+q.$$

由定理1知道方程$(p+q)x=q+z$有解，即存在$b\in B$，使得$(p+q)b=q+z$. 于是

$$z=(p+q)b+q=pb+q(I+b)=pb+qb'=pb\vee qb'$$
$$=f(b)\in f(B).$$

故 $f(B)=[pq,\ p\vee q]$. ▮

定理3 一元Booe函数具有下述性质：

(1) 若$f(x)=px\vee qx'$，则

$$f(x)=px+qx'=(p+q)x+q,$$
$$f'(x)=p'x+q'x'=(p'+q')x+q';$$

(2) 若$f_i(x)=p_ix\vee q_ix'=p_ix+q_ix' \quad (i=1,2)$，则

$$f_1(x)f_2(x)=p_1p_2x\vee q_1q_2x'=p_1p_2x+q_1q_2x',$$
$$f_1(x)\vee f_2(x)=(p_1\vee p_2)x\vee(q_1\vee q_2)x'$$
$$=(p_1\vee p_2)x+(q_1\vee q_2)x',$$
$$f_1(x)+f_2(x)=(p_1+p_2)x\vee(q_1+q_2)x'$$
$$=(p_1+p_2)x+(q_1+q_2)x'.$$

证明留作练习. ▮

一元Boole函数可以看成是Boole格B到自身的一个映射. 容易证明下述结果：

定理4 设B是Boole格，$f(x)=px\vee qx'$是给定的一元Boole函数$(p,q\in B)$，则下述条件等价：

(1) f是序同态；

(2) f是交同态(即乘法同态)；

(3) f是并同态；

(4) $q\leqslant p$.

证 显然 $f(O)=q$, $f(I)=p$, 因此(1)蕴涵(4). 由§3.4定理1知(2)、(3)分别蕴涵(1), 从而也蕴涵(4).

设(4)成立, 即 $q\leqslant p$, 则 $pq=q$. 于是

$$f(x)=px\vee pqx'=p(x\vee qx')=p(x\vee q)=px\vee q.$$

由此可见 f 是序同态, 即(4)蕴涵(1). 若 $a,b\in B$, 则

$$f(a)f(b)=(pa\vee q)(pb\vee q)=pab\vee q=f(ab).$$

$$f(a)\vee f(b)=(pa\vee q)\vee(pb\vee q)=p(a\vee b)\vee q$$
$$=f(a\vee b).$$

即 f 是乘法同态, 又是并同态. 故(4)蕴涵(2)与(3). ▌

推论2 在定理4中,

(1) f 是 B 的格自同态 $\Longleftrightarrow q\leqslant p$;

(2) f 是 B 的格自同构 $\Longleftrightarrow p=I$, $q=O$.

证明留作练习. ▌

由此可见, 由一元Boole函数导出的Boole格的自同构只有恒等自同构.

设 f 是环 R 到 R' 的一个映射, 若对任意 $a,b\in R$, 都有

$$f(a+b)=f(a)+f(b),\quad f(ab)=f(a)f(b),$$

则称 f 是**环同态**. 若 f 是环同态, 又是双射, 则称 f 为**环同构**. 当 $R=R'$ 时, 相应的环同态(环同构)叫做 R 的**环自同态**(**环自同构**).

最后讨论一元Boole函数同Boole环的自同态的联系.

定理5 设 B 是Boole格(也表示相应的Boole环), $f(x)=px\vee qx'$ 是一元Boole函数($p,q\in B$), 则下述条件等价:

(1) f 是加法同态;

(2) f 是环自同态；

(3) $q=O$.

证 设 (1) 成立，即 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，$\forall a,b\in B$. 取$b=O$，则$q=f(O)=O$. 因此(3)成立. 再由推论2知f是乘法同态，故(2)成立. 反之，若$q=O$，则$f(x)=px$. 显然f是加法同态，即 (1) 成立. (2) 蕴涵 (1) 是明显的. 故定理得证. ▮

推论3 在定理5中，

(1) 若f是环自同态，则f必是格自同态；

(2) f是环自同构$\Longleftrightarrow f$是格自同构.

证明留给读者. ▮

练　　习

1. 证明：Boole格B上任意二元Boole函数$f(x,y)$总可表成下述形式：

$$f(x,y)=a_{11}xy\vee a_{10}xy'\vee a_{01}x'y\vee a_{00}x'y',$$

(其中$a_{ij}\in B$，$i,j=0,1$).

2. 补证本节推论1—推论3及定理3.

3. 证明：二元Boole函数$f(x,y)=pxy\vee qx'y\vee rxy'\vee sx'y'$的值域充满区间$[pqrs,\ p\vee q\vee r\vee s]$.

第九章　自由格

本章先介绍自由格的一般概念(§9.1)，进而讨论自由分配格(§9.2)、自由Boole代数(§9.3)及自由模格(§9.4)．

§9.1　自　由　格

设F是由子集X所生成的格．若对任意格L及X到L的一个映射φ，总存在F到L的一个格同态φ^*，使得$\forall x\in X$，$\varphi^*(x)=\varphi(x)$，则称X是格F的一个**自由生成系**，F叫做一个**自由格**．

若用τ表示X到F的包含映射(即$\tau(x)=x$，$\forall x\in X$)，则上述定义条件可表述为：对任意格L及映射φ：$X\to L$，总存在格同态φ^*：$F\to L$，使得$\varphi^*\tau=\varphi$(即图9.1.1可交换)．有时也称φ可以开拓成格同态φ^*．容易证明这样的φ^*至多有一个．

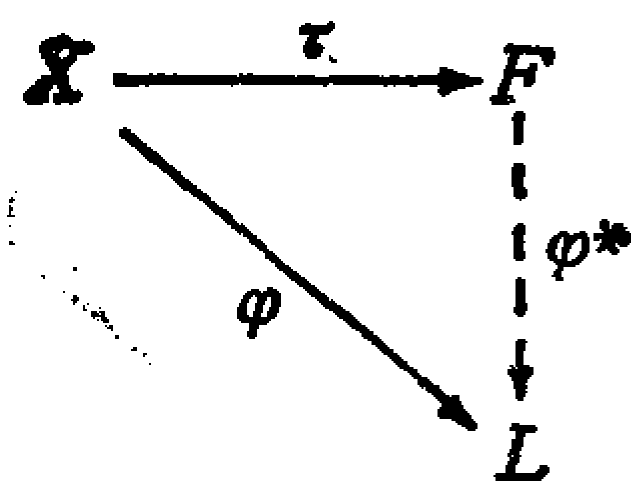


图 9.1.1

在同构意义下，自由格由它的自由生成系的势(基数)唯一确定．

定理1　设X_1，X_2分别是自由格F_1与F_2的自由生成系．如果存在双射φ：$X_1\to X_2$，则存在格同构φ^*：$F_1\to F_2$，使得$\forall a\in X_1$，$\varphi^*(a)=\varphi(a)$．

证 显然φ有逆映射φ^{-1}：$X_2 \to X_1$，记$\varphi^{-1}=\psi$。由自由格的定义知存在格同态φ^*及ψ^*（见图9.1.2），使得$\varphi^*(a)=\varphi(a)\ (\forall a \in X_1)$，$\psi^*(b)=\psi(b)\ (\forall b \in X_2)$．由于$X_1$是$F_1$的生成系，对于任意$a \in F_1$，存在$a_1, a_2, \cdots, a_n \in X_1$及格多项式$p(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，使得$a=p(a_1, a_2, \cdots, a_n)$．于是

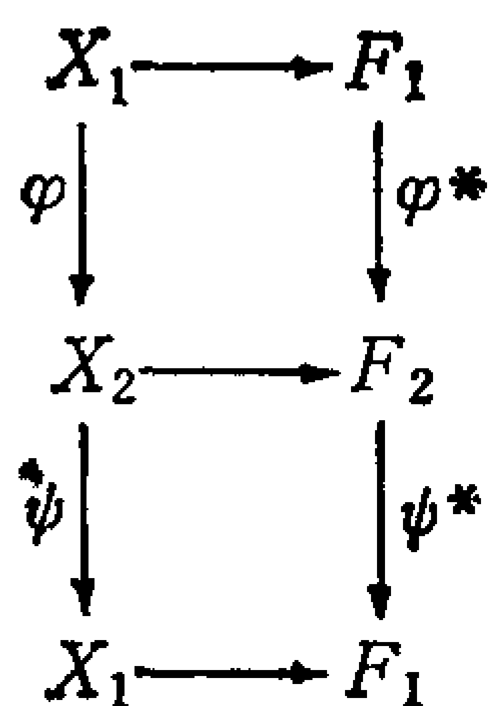


图 9.1.2

$$
\begin{aligned}
\psi^*\varphi^*(a) &= \psi^*(p(\varphi^*(a_1), \varphi^*(a_2), \cdots, \varphi^*(a_n))) \\
&= \psi^*(p(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \cdots, \varphi(a_n))) \\
&= p(\psi^*\varphi(a_1), \psi^*\varphi(a_2), \cdots, \psi^*\varphi(a_n)) \\
&= p(\psi\varphi(a_1), \psi\varphi(a_2), \cdots, \psi\varphi(a_n)) \\
&= p(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a,
\end{aligned}
$$

因此$\psi^*\varphi^*$是F_1的恒等映射．同理证$\varphi^*\psi^*$是F_2的恒等映射．故φ^*是格同构映射（ψ^*是其逆映射）．∎

下面考虑如何构造一个自由格．

设X是给定的一个非空集合，$W(X)$是X上的字代数（见§3.9）．在$W(X)$上如下定义一个二元关系$\leqslant$：对于任意的$p, q \in W(X)$，设秩p＋秩$q=r$，

(1) 当$r=2$时（即$p, q \in X$），规定$p \leqslant q \Longleftrightarrow p=q$；

(2) 当$r>2$时，假定对于秩p'＋秩$q' \leqslant r-1$的情形，$p' \leqslant q'$已经有定义，则规定$p \leqslant q \Longleftrightarrow$下述4种情形之一成立：

(i) $p=p_1 \wedge p_2$，且$p_1 \leqslant q$或$p_2 \leqslant q$；

(ii) $p=p_1 \vee p_2$，且$p_1 \leqslant q$，$p_2 \leqslant q$；

(iii) $q=q_1 \wedge q_2$，且$p \leqslant q_1$，$p \leqslant q_2$；

(iv) $q=q_1\vee q_2$，且$p\leqslant q_1$或$p\leqslant q_2$.
(其中$p_i,q_i\in W(X)$，$i=1,2$)

容易证明上述定义是合理的，并且满足自反性和传递性，即有下述

定理2 设$X,W(X)$及$\leqslant$同上，则二元关系$\leqslant$是$W(X)$的一个拟序.

证 设$p\in W(X)$. 若秩$p=1$，显然由定义知$p\leqslant p$. 设秩$p=r>1$，并且假定对所有秩比r小的$q\in W(X)$，均有$q\leqslant q$，则存在$p_1,p_2\in W(X)$，使得$p=p_1\vee p_2$或$p=p_1\wedge p_2$，其中秩$p_i<$秩$p=r(i=1,2)$. 由归纳假设知$p_1\leqslant p_1$且$p_2\leqslant p_2$，由定义得$p\leqslant p$. 故$\leqslant$满足自反性.

为证传递性，注意下述事实：若$p\leqslant q$，且$p=p_1\vee p_2$(p，q，p_1，$p_2\in W(X)$)，则$p_1\leqslant q$，$p_2\leqslant q$(可对秩q使用归纳法证明)，对偶的结论也成立.

设$p,q,w\in W(X)$，并且$p\leqslant q$，$q\leqslant w$. 令秩p+秩q+秩$w=k$，下面对k使用数学归纳法. 当$k=3$时，易见秩$p=$秩$q=$秩$w=1$，由$\leqslant$的定义知$p=q=w$，因此$p\leqslant w$. 设$k>3$，并且假定对于秩p+秩q+秩$w<k$的情形结论已经成立. 这时至多有以下七种情形：

(1) $p=p_1\vee p_2$ ($p_i\in W(X)$，$i=1,2$)；

(2) 秩$p=1$ (即$p\in X$)，$q=q_1\vee q_2$ ($q_i\in W(X)$，$i=1,2$)；

(3) $p=p_1\wedge p_2$，$q=q_1\vee q_2$ ($p_i,q_i\in W(X)$，$i=1,2$)；

(4) 秩$q=1$ (即$q\in X$)，$w=w_1\vee w_2$ ($w_i\in W(X)$，$i=1,2$)；

(5) $w=w_1\wedge w_2$ ($w_i\in W(X)$，$i=1,2$)；

(6) 秩$w=1$（即$w\in X$），$q=q_1\wedge q_2$（$q_i\in W(X)$，$i=1,2$）；

(7) $q=q_1\wedge q_2$，$w=w_1\vee w_2$（$q_i,w_i\in W(X),i=1,2$）.

对于情形（1），由上面得到的结果知$p_1\leqslant q$，$p_2\leqslant q$. 再由归纳假设得$p_1\leqslant w$，$p_2\leqslant w$，从而$p\leqslant w$. 在(2)中，由对偶原则得$p\leqslant q_1$或$p\leqslant q_2$，且$q_1\leqslant w$，$q_2\leqslant w$. 由归纳假设得$p\leqslant w$. 对于情形(3)，由$p\leqslant q$可知存在某个p_i使得$p_i\leqslant q$或者有某个q_j使得$p\leqslant q_j$. 由前者知$p_i\leqslant w$，从而$p\leqslant w$；由后者知$q_1\leqslant w$，$q_2\leqslant w$，从而$p\leqslant w$. 在（4）中，由$q\leqslant r$知$q\leqslant w_1$或者$q\leqslant w_2$. 应用归纳假设得$p\leqslant w_1$或者$p\leqslant w_2$，从而$p\leqslant w$. 情形(5)、(6)、(7)分别是(1)、(2)、(3)的对偶.

综合上述可知，无论哪种情形，均有$p\leqslant w$. 故传递性成立. ▮

在$W(X)$中如下定义二元关系$\sim$：

$$p\sim q \Longleftrightarrow p\leqslant q \text{且} q\leqslant p,\quad \forall\, p,q\in W(X)$$

则$\sim$是$W(X)$上的一个等价关系. 在商集$W(X)/\sim$中规定

$$[p]\leqslant[q]\Longleftrightarrow p\leqslant q \qquad (\forall\, p,q\in W(X)),$$

则$(W(X)/\sim,\ \leqslant)$成为一个偏序集（§2.1定理4）.

定理3 $(W(X)/\sim,\ \leqslant)$是自由格，$X^*=\{[x]\mid x\in X\}$是它的一个自由生成系，并且映射$x\mapsto[x]$是X到X^*的双射.

证 在偏序集$(W(X)/\sim,\ \leqslant)$中，任意两个元素（等价类）$[p]$，$[q]$的上、下确界存在，即

$$[p]\vee[q]=[p\vee q],\quad [p]\wedge[q]=[p\wedge q].$$

因此$(W(X)/\sim,\ \leqslant)$是格. 显然$X^*=\{[x]\mid x\in X\}$是它的生成系，并且映射$x\mapsto[x]$是X到X^*的双射. 设L是一个格，又设φ：$X^*\to L$是任意映射，则可得到X到L的一个映射

$\psi: x \mapsto \varphi([x])$. 由字代数$W(X)$的泛性（§3.9定理1）知$\psi$可以开拓成$W(X)$到$L$的映射$\psi^*$，使得$\psi^*(x)=\psi(x)=\varphi([x])$ $(\forall x \in X)$，并且对于$p,q \in W(X)$，有

$$\psi^*(p \vee q)=\psi^*(p) \vee \psi^*(q), \psi^*(p \wedge q)=\psi^*(p) \wedge \psi^*(q).$$

下面证明ψ^*在$\sim$的每个等价类上作用相同．为此只须证明：当$p \leqslant q$时必有$\psi^*(p) \leqslant \psi^*(q)$．

设秩p+秩$q=r$，对r使用归纳法．当$r=2$时（即$p,q \in X$），结论显然成立．假定$r>2$，并且对于秩p+秩$q<r$的情形结论已经成立．当秩p+秩$q=r$，$p \leqslant q$时可分以下五种情形：

(1) $p=p_1 \vee p_2$，$p_1,p_2 \in W(X)$；

(2) $p=p_1 \wedge p_2$，$p_1,p_2 \in W(X)$，$q \in X$；

(3) $p=p_1 \wedge p_2$，$q=q_1 \vee q_2$，$p_i,q_i \in W(X)$，$i=1,2$；

(4) $q=q_1 \wedge q_2$，$q_1,q_2 \in W(X)$；

(5) $q=q_1 \vee q_2$，$q_1,q_2 \in W(X)$，$p \in X$.

在(1)中可得$p_i \leqslant q$，由归纳假设知$\psi^*(p_i) \leqslant \psi^*(q)$，$i=1,2$．于是有$\psi^*(\ )=\psi^*(p_1) \vee \psi^*(p_2) \leqslant \psi^*(q)$．在(2)中可得$p \leqslant p_i \leqslant q$ $(i=1$或$2)$．由归纳假设知$\psi^*(p) \leqslant \psi^*(q)$．在(3)中可得$p \leqslant p_i \leqslant q$或$p \leqslant q_j \leqslant q$ $(i,j=1$或$2)$．再由归纳假设推出$\psi^*(p) \leqslant \psi^*(q)$．

(4)与(5)分别是(1)与(2)的对偶情形．

综合上述讨论可知ψ^*导出商集$W(X)/\sim$到L的一个映射φ^*，使得$\varphi^*([q])=\psi^*(q)$，$\forall q \in W(X)$．容易证明φ^*是格同态，且$\varphi^*([x])=\varphi([x])$，$\forall [x] \in X^*$．故$(W(X)/\sim, \leqslant)$是一个自由格，$X^*$是它的自由生成系．▌

在上述定理中，如果将$x(x \in X)$与$[x]$等同看待，X与

X^*等同看待，并且$p=q$当且仅当$[p]=[q]$，那么自由格$(W(X)/\sim, \leqslant)$就可以看成是以X为自由生成系的自由格（记作$FL(X)$）.

因此对任意非空集合X，都存在一个以X为自由生成系的自由格.

由定理3可以给出格中一个子集成为自由生成系的特征.

推论1 格F的非空子集X是一个自由生成系$\Longleftrightarrow F$由X所生成，并且满足下述条件：

(1) 若$x\leqslant y$，$x,y\in X$，则$x=y$；

(2) 若$x\leqslant u\vee v$，$x\in X$，$u,v\in F$，则$x\leqslant u$或$x\leqslant v$；

(3) 若$u\wedge v\leqslant x$，$x\in X$，$u,v\in F$，则$u\leqslant x$或$v\leqslant x$；

(4) 若$s\wedge t\leqslant u\vee v$，$s,t,u,v\in F$，则或者$s\wedge t\leqslant u$，或者$s\wedge t\leqslant v$，或者$s\leqslant u\vee v$，或者$t\leqslant u\vee v$.

证明留作练习. ▮

推论2 任何格L都是某一个自由格的同态象.

证 任取L的一个生成系$X(\neq\varnothing)$，$FL(X)$是以X为自由生成系的自由格，则X到自身的恒等映射可以开拓成$FL(X)$到L的一个格同态φ. 显然φ是满同态，故推论成立. ▮

定理4 设u,v是给定的两个r元格多项式，则下述条件等价：

(1) 任意格L满足格等式$u=v$；

(2) 任意有限格N满足格等式$u=v$；

(3) 任意自由格F满足格等式$u=v$.

证 由推论2可知(3)⇒(1)⇒(2)显然成立，下证(2)⇒(3). 若有某一个自由格$FL(X)$不满足$u=v$，则

存在$p_1,p_2,\cdots,p_r\in W(X)$，使得

$$u(p_1,p_2,\cdots,p_r)\neq v(p_1,p_2,\cdots,p_r).$$

不妨设秩$u(p_1,\cdots,p_r)$ + 秩$v(p_1,\cdots,p_r)=m$，$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$是n元有限集．令

$$M=\{p\mid p\in W(X),\ 秩p\leqslant n\},$$

$$q=x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n,$$

$$L=\{q_1\wedge q_2\wedge\cdots\wedge q_r\mid q_i\in M, r为正整数\}\cup\{q\}.$$

易证L是有限格，并且L不满足格等式$u=v$．因此(2)蕴涵(3)．▌

一个自由格F可能包含一个真子格S也是自由格，但是F的自由生成系的势未必大于S的自由生成系的势．P. Whitman曾证明了下述结果：由三个元素自由生成的格包含一个由无限多个元素自由生成的子格[5]．

练　习

1．证明本节推论1．

2．证明：自由格定义中的φ^*是唯一的．

3．若自由格F有两个自由生成系X，Y，证明$X=Y$．

§9.2　自由分配格

设F是由子集X生成的分配格，并且对于X到一个分配格L的任意映射φ，均可开拓成F到L的格同态φ^*，这时就称F是由X生成的**自由分配格**．

类似§9.1定理1，有下述结果：

定理1　设F_i是由X_i $(i=1, 2)$ 生成的自由分配格．

φ: $X_1\to X_2$是双射，则φ可以开拓成格同构φ^*: $F_1\to F_2$.

证明留给读者. ▮

下面着重讨论由n个元素生成的自由分配格. 为此需要引入所谓J-正规多项式的概念.

设$N=\{1, 2, \cdots, n\}$是一个下标集. N的一个子集系J叫做N的**J-闭子集系**，如果J是N的幂集格$P(N)$中的一个J-闭子集(见§2.5). 显然J是N的J-闭子集系当且仅当对任意$A\subseteq B\subseteq N$, 若$A\in J$, 必有$B\in J$. 称J是N的**非平凡J-闭子集系**，如果$J\neq\varnothing, J\neq P(N)$. 易证$N$的两个非平凡的J-闭子集系的交与并仍是$N$的非平凡的J-闭子集系. J-闭子集系$J$是非平凡的当且仅当$J\neq\varnothing$且$S\neq\varnothing(\forall S\in J)$.

由§3.9定理4知道，在分配格上，任何一个格多项式总可表为(即恒等于)一些$\wedge$-多项式之并或一些$\vee$-多项式之交.

设J是$N=\{1, 2, \cdots, n\}$的一个非平凡J-闭子集系. 称形如

$$f_J(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\bigvee_{A\in J}\left(\bigwedge_{k\in A}x_k\right)$$

的格多项式为n元**J-正规多项式**.

容易证明

定理1 在任意分配格L中,

(1)若$f_J(X)$, $f_K(X)$是$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$上两个J-正规多项式，则$f_{J\cap K}(X)$, $f_{J\cup K}(X)$也是X上的J-正规多项式，并且

$$f_J(X)\wedge f_K(X)=f_{J\cap K}(X),$$
$$f_J(X)\vee f_K(X)=f_{J\cup K}(X).$$

(2)若$a_i\in L$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, 则由$a_1, \cdots, a_n$生

成的子格恰由所有形如$f_J(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的元素所组成，其中$f_J(x_1, \cdots, x_n)$取遍所有$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$上的J-正规多项式.

证 (1)显然.

(2)记$W=\{f_J(a_1, a_2, \cdots, a_n) | f_J(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$X$上的J-正规多项式$\}$. 由(1)知$W$是$L$的子格，并且任意包含$a_1, a_2, \cdots, a_n$的子格一定包含$W$. 记

$$J_i=\{A \mid A\subseteq\{1, 2, \cdots, n\}, i\in A\}, \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

易见$f_{J_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是$X$上的J-正规多项式，并且$L$满足格等式$x_i=f_{J_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 于是$a_i=f_{J_i}(a_1, a_2, \cdots, a_n)\in W$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 因此W是L中包含$a_1, a_2, \cdots, a_n$的最小的子格，即W是由$a_1, a_2, \cdots, a_n$生成的子格. ▮

定理2 设$L=2^n$是有n个原子$p_1, p_2, \cdots, p_n$的Boole格，$X_i=(p_i']$是由p_i'(p_i的补元)生成的主理想($i=1, 2, \cdots, n$)，则L的子集M是L的非平凡M-闭子集当且仅当存在$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$上的J-正规多项式$f_J(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得

$$M=f_J(X_1, X_2, \cdots, X_n)=\bigcup_{A\in J}\Big(\bigcap_{k\in A}X_k\Big).$$

证 若$f_J(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是J-正规多项式，对任意$A\in J$，由§3.3推论2可知

$$\bigcap_{k\in A}X_k=\bigcap_{k\in A}(p_k']=\Big(\bigwedge_{k\in A}p_k'\Big]$$

是L的M-闭子集. 因此

$$f_J(X_1, X_2, \cdots, X_n)=\bigcup_{A\in J}\Big(\bigcap_{k\in A}X_k\Big)$$

也是L的M-闭子集. 显然$M\neq\varnothing$，$M\neq L$.

反之，设M是L的非平凡M-闭子集，易见$M=\bigcup_{a\in M}(a]$。对任意$a\in M$，$a\neq I$，存在$\{1, 2, \cdots, n\}$的非空子集B_a，使得$a=\bigwedge_{k\in B_a} p_k'$. 令

$$J_a=\{A \mid A\subseteq\{1, 2, \cdots, n\}, \text{且} B_a\subseteq A\},$$

则$f_{J_a}(x_1, \cdots, x_n)$是J-正规多项式，并且

$$(a]=f_{J_a}(X_1, X_2, \cdots, X_n)=\bigcup_{A\in J_a}\left(\bigcap_{k\in A} X_k\right).$$

令$J=\bigcup_{a\in M} J_a$，则$f_J(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是J-正规多项式，并且

$$M=\bigcup_{a\in M}(a]=\bigcup_{a\in M} f_{J_a}(X_1, \cdots, X_n)$$

$$=f_J(X_1, X_2, \cdots, X_n). \quad ▮$$

由于$L=2^n$同构于n元集$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$的幂集格（§8.3定理2）. 利用上述结果可知$L$的非平凡M-闭子集同$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$上的J-正规多项式存在一一对应.

由上述结果直接可得

定理3 设F是$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$上所有J-正规多项式组成的集合，规定

$$f_J(X)\wedge f_K(X)=f_{J\cap K}(X),$$
$$f_J(X)\vee f_K(X)=f_{J\cup K}(X),$$

则 (1)$(F, \wedge, \vee)$是由$f_{J_i}(i=1, 2, \cdots, n)$生成的自由分配格，其中$J_i=\{A \mid A\subseteq\{1, 2, \cdots, n\}, i\in A\}$, $1\leqslant i\leqslant n$.

(2)F同构于n元集$\{1, 2, \cdots, n\}$的所有非平凡J-闭子集系构成的集环. ▮

因此我们有下述结论：

定理4 由n个元生成的自由分配格，同构于n元集$\{1,$

2, …, n}的所有非平凡J-闭子集系构成的集环. 添加泛界 O, I以后, 则同构于2^{2^n}(记作FD(n), 其中指数2^n是指n元集的幂集格).

证 由§7.2定理1及上述结果知结论成立. ▌

练　习

1. 证明本节定理1.

2. 令$f(n)$表示FD(n)的元素个数. 试证: $f(1)=3$, $f(2)=6$, $f(3)=20$, $f(4)=168$.

3. 试证: 若n是偶数, 则FD(n)的元素个数也为偶数.

§9.3　自由Boole代数

首先讨论Boole多项式.

用符号$\wedge$, $\vee$, $'$把n个变量x_1, x_2, …, x_n连接起来的式子叫做一个Boole**多项式**, 通常用$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示. 同格多项式一样, 也可以对Boole多项式给出严格的定义(留给读者去做). 如§8.4所述, 一个Boole多项式在任意Boole格上可定义一个Boole函数. 两个Boole多项式$p(x_1, \cdots, x_n)$和$q(x_1, \cdots, x_n)$称为**相等**或**恒等**(记作$p(x_1, \cdots, x_n)=q(x_1, \cdots, x_n)$), 如果它们在任何Boole格上定义的函数相同. Boole多项式之间也可以(形式地)作交、并、补运算(如$p\wedge p$, $p\vee q$及p'), 结果仍是一个Boole多项式. 并且在恒等意义下, 在Boole格中成立的诸算律(如幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律及De Morgan律等)在这里都满足.

因此任何一个n元Boole多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$总可以化成(恒等于)下述形式(称为**析取范式**)：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigvee_{j=1}^{m}\left(\bigwedge_{i=1}^{n} y_{ij}\right),$$

其中$y_{ij} = x_i$或x_i' $(\forall i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$.
具体方法如下：

(1) 如果Boole多项式在某个括号外有取补符号“′”，则利用De Morgan律及对合律

$$(p\wedge q)' = p'\vee q', \ (p\vee q)' = p'\wedge q', \ (p')' = p,$$

将其移到括号里面去，从而使取补符号“′”仅出现在单个变量x_i上.

(2) 重复使用分配律、交换律及幂等律，可将给定的Boole多项式化成如下形式：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \bigvee_{S\in J}(\bigwedge_{k\in S} y_k),$$

其中J是由$\{1, 2, \cdots, n\}$的若干非空子集构成的子集族，$y_k\in\{x_1, x_2, \cdots, x_n; x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$.

(3) 若在某项$\bigwedge_{k\in S} y_k$中，同时出现某个x_j和x_j'，则该项可以去掉.

(4) 若某项$\bigwedge_{k\in S} y_k$中，既不含x_i，又不含x_i'，则利用$x_i\vee x_i' = I$，可得

$$\bigwedge_{k\in S} y_k = (\bigwedge_{k\in S} y_k)\wedge(x_i\vee x_i') = (\bigwedge_{j\in S'} y_j)\vee(\bigwedge_{t\in S''} y_t),$$

其中上式右端出现的两项中必含有x_i或x_i'.

重复上述步骤，可将Boole多项式$f(x_1, \cdots, x_n)$化成析取范式. 称析取范式中出现的每一个$\wedge$-多项式$\bigwedge_{i=1}^{n} y_i$($y_i = x_i$或x_i', $i=1, 2, \cdots, n$)为**极小Boole多项式**. 显然共有2^n个不同的极小Boole多项式. 任何一个Boole多项式都可

以化成若干个极小Boole多项式之并.

例如三元Boole多项式$f=((x\wedge y')'\vee z')\wedge(z\vee x')'$可化为

$$
\begin{aligned}
f&=(x'\vee y\vee z')\wedge(z'\wedge x)\\
&=(x'\wedge z'\wedge x)\vee(y\wedge z'\wedge x)\vee(z'\wedge z'\wedge x)\\
&=(y\wedge z'\wedge x)\vee(z'\wedge x)\\
&=(y\wedge z'\wedge x)\vee(z'\wedge x\wedge y)\vee(z'\wedge x\wedge y')\\
&=(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z').
\end{aligned}
$$

所有不同的(即非恒等)三元极小Boole多项式共有八个:

$x\wedge y\wedge z$, $x'\wedge y\wedge z$, $x\wedge y'\wedge z$, $x\wedge y\wedge z'$,

$x\wedge y'\wedge z'$, $x'\wedge y\wedge z'$, $x'\wedge y'\wedge z$, $x'\wedge y'\wedge z'$.

定理1 有且仅有一种方法把已知的Boole多项式写成若干个不同的极小Boole多项式之并(即析取范式是唯一的).

证 析取范式的存在性是显然的. 为证唯一性, 只需证明两组不全相同的极小Boole多项式之并可定义不同的Boole函数. 这里仍用§9.2定理2中给出的Boole格$L=2^n$, p_1, p_2, …, p_n是L的n个原子. $X_i=(p_i']$. 易证$X_i'=[p_i)$恰是X_i在L内的补集($i=1, 2, \cdots, n$). 若$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是任意一个极小Boole多项式, 不妨设

$$
f_i(x_1, \cdots, x_n)=x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge\cdots\wedge x_{i_s}\wedge x'_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge x'_{i_n}
$$

于是

$$
f_i(X_1, \cdots, X_n)=X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_s}\cap X'_{i_{s+1}}\cap\cdots\cap X'_{i_n}.
$$

容易证明$f_i(X_1, \cdots, X_n)$是L中的单元集. 反之,对于L的

任何单元集$\{a\}$，由于a可唯一表成若干p_i'之交，比如$a=p_{i_1}'\wedge p_{i_2}'\wedge\cdots\wedge p_{i_s}'$，易证对于极小Boole多项式

$$f_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)=x_{i_1}\wedge\cdots\wedge x_{i_s}\wedge x'_{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge x'_{i_n},$$

必有

$$\{a\}=f_i(X_1,\ \cdots,\ X_n)$$
$$=X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_s}\cap X'_{i_{s+1}}\cap\cdots\cap X'_{i_n}.$$

这样所有n元极小Boole多项式同L的元素之间存在一一对应．因此任意两组不全相同的极小Boole多项式之并构成的析取范式$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，$g(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，必定给出L的两个不同的子集$f(X_1,\ \cdots,\ X_n)$与$g(X_1,\ \cdots,\ X_n)$，即f，g在L的幂集格$P(L)$上定义不同的Boole函数．▌

记$C[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]$为全体$n$元Boole多项式的析取范式构成的集合．$f_i$表示由所有含$x_i$的极小Boole多项式之并构成的析取范式．易见$C[x_1,\ \cdots,\ x_n]$共有$2^{2^n}$个析取范式．若$f,g\in C[x_1,\cdots,\ x_n]$，则$f\wedge g$，$f\vee g$，$f'$也是Boole多项式，它们可唯一表成析取范式，仍分别用$f\wedge g$，$f\vee g$，f'表示之．显然在任意Boole格上，$x_i=f_i$，因此任何一个析取范式都可由若干f_i取交、并、补表出．于是有下述结果：

定理2 设$C[x_1,\ \cdots,\ x_n]$，$f_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$同上，则

(1) $(C[x_1,\ \cdots,\ x_n],\ \wedge,\ \vee,\ ')$是由$f_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$生成的Boole代数，它同构于$n$维Boole代数$2^n$的幂集格（即$2^{2^n}$）．

(2) 若$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$是Boole代数B的任意n个元素，则映射$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)\mapsto f(a_1,\ \cdots,\ a_n)$是$C[x_1,\ \cdots,\ x_n]$到$B$的代数同态（即保持交、并、补运算）．

证明留给读者. ∎

和自由分配格类似，下面给出自由Boole代数的定义.

设B是由n个元素x_1, x_2, …, x_n生成的Boole代数，并且对于$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$到一个Boole代数A的任意映射φ，总可开拓成B到A的代数同态φ^*(即$\varphi^*(x_i)=\varphi(x_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 并且$\varphi^*(a\wedge b)=\varphi^*(a)\wedge\varphi^*(b)$, $\varphi^*(a\vee b)=\varphi^*(a)\vee\varphi^*(b)$, $\varphi^*(a')=(\varphi^*(a))'$, $\forall a, b\in B$)，这时就称B是由x_1, …, x_n生成的**自由Boole代数**.

由n个元素生成的任意两个自由Boole代数都是同构的.

由上述讨论可知：

推论1 在定理2中，$C[x_1, x_2, \cdots, x_n]$是由n个元素$f_i(i=1, 2, \cdots, n)$生成的自由Boole代数. ∎

在同构意义下，由n个元素生成的自由Boole代数只有一个. 因此有

定理3 由n个元素生成的自由Boole代数是2^{2^n}.(注意：这里指数2^n是指数字（2的n次方），2^{2^n}表示含2^n个元素集合的幂集格） ∎

练 习

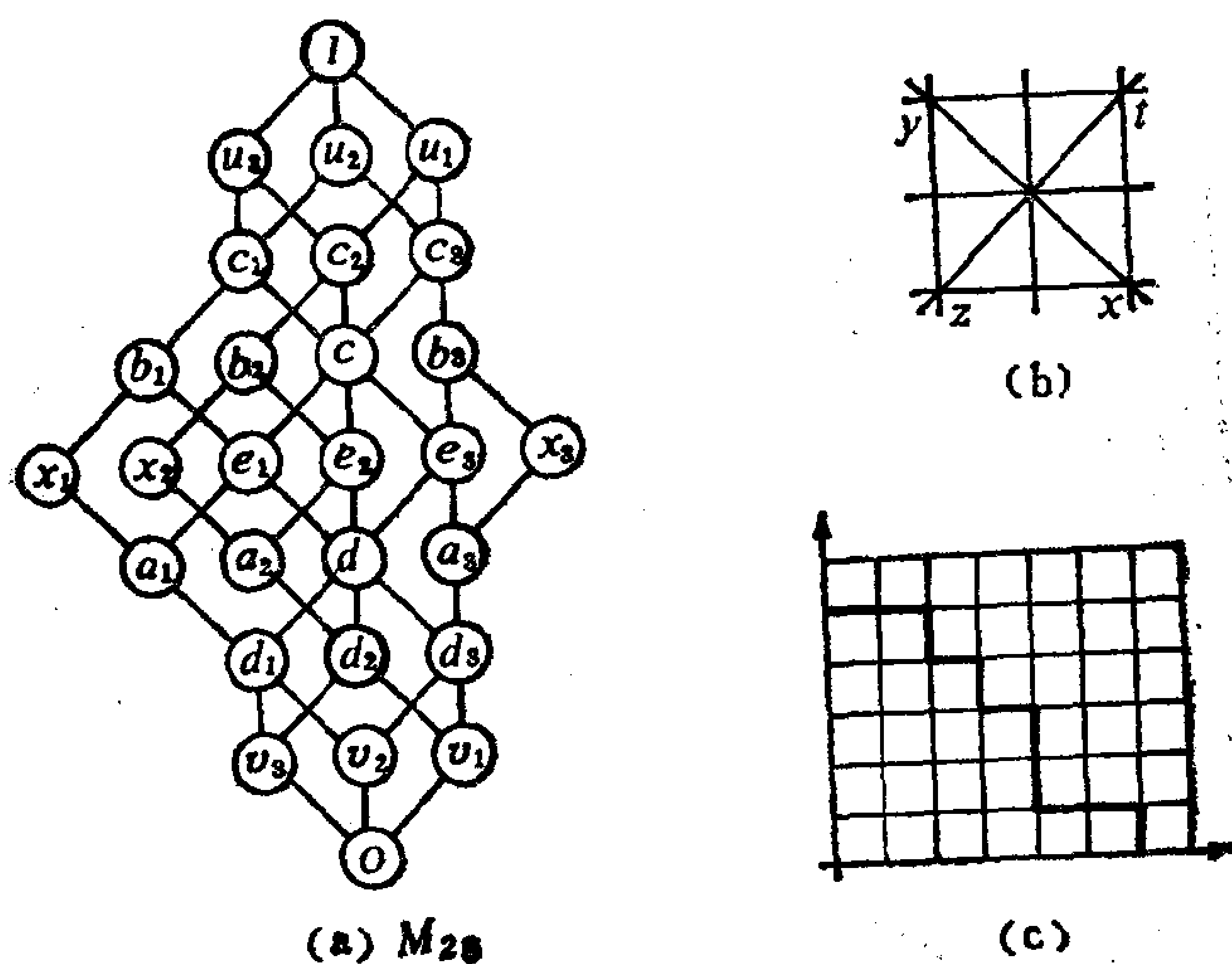
1.证明本节定理2.

2.证明：由n个元素生成的任意两个自由Boole代数是同构的.

3.试证：由两个元素生成的自由格是一个Boole格，但不是由两个元素生成的自由Boole代数.

§9.4 自由模格

仿自由分配格和自由Boole代数的情形，读者不难给出**自由模格**的定义. 需要指出的是，模格的代数性质比起分配格要复杂得多. 本节只准备简要介绍由三个元素生成的自由



(a) M_{28}　　(b)　　(c)

图 9.4.1

模格及由两个有限链生成的自由模格.

定理1(Dedekind)　由三个元素生成的自由模格含有28个元素，其示图如图9.4.1(a).

证　图9.4.1(a)所示的偏序集 M_{28} 是自对偶的，它所有的元素可以对称地分成12组，每一组元素对下标的置换是不

变的．不难验证，在图9.4.1(a)中，任意两个元素都有上确界和下确界，并且若$a\neq b$有公共上邻(下邻)，则必有公共下邻(上邻)．因此M_{28}是一个模格（§5.4定理2）．由图9.4.1(a)可知

$$I=x_1\vee x_2\vee x_3;\qquad O=x_1\wedge x_2\wedge x_3;$$

$$u_1=x_2\vee x_3,\qquad u_2=x_1\vee x_3,\qquad u_3=x_1\vee x_2;$$

$$v_1=x_2\wedge x_3,\qquad v_2=x_1\wedge x_3,\qquad v_3=x_1\wedge x_2;$$

$$c_1=u_2\wedge u_3,\qquad c_2=u_1\wedge u_3,\qquad c_3=u_1\wedge u_2;$$

$$d_1=v_2\vee v_3,\qquad d_2=v_1\vee v_3,\qquad d_3=v_1\vee v_2;$$

$$c=u_1\wedge u_2\wedge u_3;\qquad d=v_1\vee v_2\vee v_3;$$

$$b_i=x_i\vee v_i\quad(i=1,\ 2,\ 3);\qquad a_i=x_i\wedge u_i(i=1,\ 2,3);$$

$$e_i=u_i\wedge(x_i\vee v_i)=(u_i\wedge x_i)\vee v_i\quad(i=1,\ 2,\ 3).$$

于是M_{28}是由x_1，x_2，x_3三个元素生成的模格．

另一方面，图9.4.1(a)中关于交、并运算所成立的方程(格等式)均可由模格所满足的算律（幂等律、交换律、结合律、吸收律及模律等)推出．利用对称性可将这一验算工作大大简化．例如

$$\begin{aligned}a_1\vee a_2&=(x_1\wedge u_1)\vee(x_2\wedge u_2)\qquad(\text{由模律})\\&=((x_1\wedge u_1)\vee x_2)\wedge u_2\\&=((x_1\vee x_2)\wedge u_1)\wedge u_2\\&=u_1\wedge u_2\wedge u_3=c,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_2\vee e_3&=(x_2\vee v_2)\vee(a_3\vee v_3)\qquad(\text{由结合律})\\&=x_2\vee a_3\qquad(\text{因}v_3\leqslant x_2\text{且}v_2\leqslant a_3)\\&=x_2\vee(x_3\wedge(x_1\vee x_2))\\&=(x_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee x_2)=c_2.\end{aligned}$$

由此可知M_{28}是由三个元素生成的自由模格，它有28个元

素. ▮

注 由4个元素生成的自由模格是无限格. 为验证这一点, 考虑由诸矢量$(\lambda x, 0, \lambda x)$, $(0, \lambda y, \lambda z)$, $(0, 0, \lambda z)$及$(\lambda t, \lambda t, \lambda t)$生成的3维实向量空间的子空间格(正交模格)的子格. 在射影平面上作为点考虑, 它们生成射影点和直线的一个子格S, 它包含点x, y, z, t(其中任意三点不共线). 当S包含任两点时, 必包含通过该两点的直线; 包含任两直线时, 必包含它们的交点. 图9.4.1(b) 表明S的某些点和直线在"有限"(x, y)-平面(由向量$(x, y, 1)$组成)上的射影. 在几何上显然可以得到(利用相继分半的方法) S的一个无限子集(因为$(x\vee t)\wedge(y\vee z)$及$(y\vee t)\wedge(z\vee x)$在向量$(x, y, 0)$的"无穷远直线上").

下面考虑在一个模格中, 由两个有限链生成的子格. 设L是任意格(有泛界O, I), 给定L的两个有限链:

$$O=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=I,$$

$$O=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=I.$$

令$u_j^i=x_i\wedge y_j$, $v_j^i=x_i\vee y_j$ $(i=0, 1, \cdots, m;\ j=0, 1, \cdots, n)$. 显然诸$u_j^i$或$v_j^i$中包括所有的$x_i$及$y_j$, 从而$u_j^i$的并或$v_j^i$的交中也包括所有的$x_i$及$y_j$.

引理1 u_j^i的任意并可以写成形式:

$$(x_{i(1)}\wedge y_{j(1)})\vee\cdots\vee(x_{i(r)}\wedge y_{j(r)}),$$

其中$i(1)>i(2)>\cdots>i(r)$并且$j(1)<j(2)<\cdots<j(r)$.

证 若两个u_j^i有相同上标, 由于y_j是一个链, 一个u_j^i必含于另一个, 因此可被它吸收. 这样可使所有的上标不同. 同样地也可使所有的下标不同. 若$i>i'$, 且$j\geqslant j'$, 则$x_i\wedge y_j$将吸收$x_{i'}\wedge y_{j'}$. 这样在尽可能吸收有关项之后, 利用

交换律将上标$i(k)$排成降序的同时，下标$j(k)$自然成为升序. ▌

引理2 若在一个模格中，对所有的i均有$a_i \geqslant a_{i+1}$及$b_i \leqslant b_{i+1}(i=1, 2, \cdots, r)$，则

$$
\begin{aligned}
&(a_1 \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a_r \wedge b_r) \\
&= a_1 \wedge (b_1 \vee a_2) \wedge \cdots \wedge (b_{r-1} \vee a_r) \wedge b_r, \\
&(b_1 \vee a_1) \wedge \cdots \wedge (b_r \vee a_r) \\
&= b_1 \vee (a_1 \wedge b_2) \vee \cdots \vee (a_{r-1} \wedge b_r) \vee a_r.
\end{aligned}
$$

证 对r使用归纳法. 由对偶性只需假定第二式在少于r项时成立，可推出第一式成立. 反复使用模律可得

$$
\begin{aligned}
&(a_1 \wedge b_1) \vee \cdots \vee (a_r \wedge br) \\
&= a_1 \wedge (b_1 \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3) \vee \\
&\quad \cdots \vee (a_{r-1} \wedge b_{r-1}) \vee a_r) \wedge b_r.
\end{aligned}
$$

利用对第二式的归纳假设可推出

$$
\begin{aligned}
&(b_1 \vee a_2) \wedge (b_2 \vee a_3) \wedge \cdots \wedge (b_{r-1} \vee a_r) \\
&= b_1 \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3) \vee \cdots \vee (a_{r-1} \wedge b_{r-1}) \vee a_r,
\end{aligned}
$$

代入上式右端即得第一式. ▌

引理3 设L是模格，引理1中诸u^i_j的并是一个子格.

证 显然u^i_j的并的任何并仍是u^i_j之并，u^i_j的并之交是v^i_j的交，从而也是u^i_j之并(引理1，引理2). 因此引理3得证. ▌

现在注意，令x_i表示矩形$0 \leqslant x \leqslant m$，$0 \leqslant y \leqslant n$中满足$x \leqslant i$的点$(x, y)$的集合，$y_j$表示上述矩形中满足$y \leqslant j$的点$(x, y)$的集合，$L$表示矩形(作为点集)的幂集格，则引理1中所述的$u^i_j$之并恰是该矩形中的锯齿形子集. 例如图9.4.1(c)中表示了

$$(x_2 \wedge y_5) \vee (x_3 \wedge y_4) \vee (x_4 \wedge y_3) \vee (x_6 \wedge y_1).$$

由引理3，这些子集构成一个集格(即L的子格)．因此它表示同构于由两个链生成的自由模格．显然这个格是有限分配格．这就证明了

定理2 由两个有限链生成的自由模格是一个有限分配格．∎

练　习

1．将M_{28}(图9.4.1(a))表示成2^6M_5的子格(其中M_5是五元模格)．由此证明M_{28}是模格．

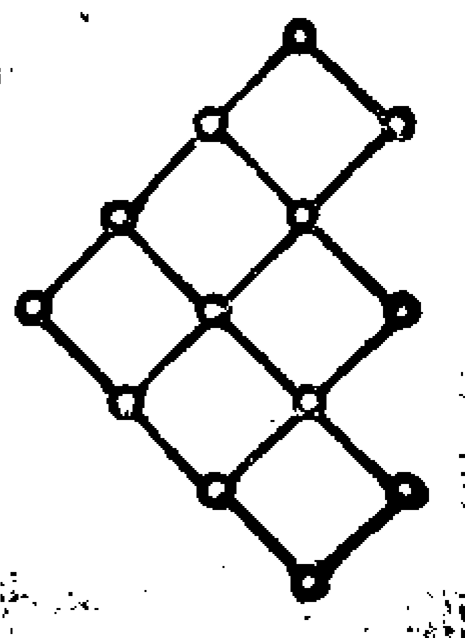


图 9.4.2

2．证明M_{28}的宽为3．

3．证明由$a>b$和$c>d$生成的自由模格有18个元素．

4．证明：当$m=1$，$n=3$，并且O，I不添入，则定理2的格的示图可以用图9.4.2表示．

第十章 格对其它数学分支的渗透

本章简单介绍格对其它数学分支的渗透和应用．首先讨论在泛函分析中应用甚广的格群和格环（§10.1），而后进一步探讨完全分配格（称之为分子格）的性质及F格（§10.2），它们在Fuzzy数学中有着重要作用，最后简单介绍王国俊先生的拓扑分子格理论（§10.3）和作者在格与测度方面的初步工作（§10.4）．

§10.1 格群与格环

$(G, +, \leqslant)$称为**半序群**（或**偏序群**），如果$(G, +)$是一个群[1]，$(G, \leqslant)$是一个偏序集，并且群运算与序具有谐和性，即

（Ⅰ）$\forall a, b, c \in G$，当$a \leqslant b$时，有

$$a+c \leqslant b+c, \quad c+a \leqslant c+b.$$

可以证明，条件（Ⅰ）与条件

（Ⅰ′） 当$a \leqslant b$时，$\forall x, y \in G$有：$x+a+y \leqslant x+b+y$

是等价的．

进一步地，若$(G, \leqslant)$是全序集（格）且（Ⅰ）式成立，则称$(G, +, \leqslant)$为**全序群**（**格群**）．

---

① 这里群运算用加法表示，但未必满足交换律．

对于格群，群运算与序的谐和性可以等价地换为群运算与格中的$\vee$和$\wedge$运算谐和，即

（Ⅱ）$\forall a, b, c\in G$，有

$$(a\vee b)+c=(a+c)\vee(b+c),$$
$$(a\wedge b)+c=(a+c)\wedge(b+c),$$
$$c+(a\vee b)=(c+a)\vee(c+b),$$
$$c+(a\wedge b)=(c+a)\wedge(c+b).$$

证明留给读者.

例1 有理数加群(Q, +)，同时考虑其大小顺序"$\leqslant$"，则(Q, +, $\leqslant$)是全序群，并且还是格群. 对于整数加群 Z 也有同样的结论.

例2 令G表示$[a, b]$上的全体实函数，且$\forall f, g\in G$，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad (x\in[a, b])$$
$$f\leqslant g\Longleftrightarrow \forall x\in[a, b],\ f(x)\leqslant g(x),$$

则$(G, +, \leqslant)$是格群，但它不是全序群.

记 0 为群中的恒等元，$-x$ 为 x 的逆元. 下列事实显然：

设G是半序群，如果$x_i, y_i\in G$，$x_i\leqslant y_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则$\sum_{i=1}^{n} x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n} y_i$；又若$x, y\in G$，则$x\leqslant y\Longleftrightarrow x-y\leqslant 0\Longleftrightarrow -y\leqslant -x$.

定理1 如果半序群G是交半格，则G是格群，且

$$a\vee b=-((-a)\wedge(-b)).$$

证 因为$(-a)\wedge(-b)\leqslant -a$，$(-a)\wedge(-b)\leqslant -b$，故

$$a\leqslant -((-a)\wedge(-b)),\quad b\leqslant -((-a)\wedge(-b)).$$

又若 $a\leqslant x$，$b\leqslant x$，则$-x\leqslant -a$，$-x\leqslant -b$. 从而

$$-x\leqslant(-a)\wedge(-b),\ 即\ -((-a)\wedge(-b))\leqslant x,$$

故有 $a\vee b=-((-a)\wedge(-b))$. ▌

同理可以证明

定理2 如果半序群是并半格，则它是格群，且

$$a\wedge b=-((-a)\vee(-b)).\ ▌$$

半序群G中的元x称为**正元**(**负元**)，如果$x\geqslant 0$($x\leqslant 0$)，正元集记作P，负元集记作$-P$. 显然有：

$$P+P\subseteq P,\ P\cap(-P)=\{0\}.$$

定理3 设G是半序群，则$\forall a\in G$，有

$$(-a)+P+a=P.$$

证 $\forall x\in P\Longrightarrow x\geqslant 0\Longrightarrow(-a)+x\geqslant -a\Longrightarrow(-a)+x+a\geqslant(-a)+a=0\Longrightarrow(-a)+x+a\in P$.

又$\forall y\in P$，由于$y=(-a)+(a+y+(-a))+a$，而$a+y+(-a)\in P$，所以 $y\in(-a)+P+a$. 故有

$$(-a)+P+a=P.\ ▌$$

定理4 设H是群G的一个子集且满足

(i) $0\in H$;

(ii) $H+H\subseteq H$;

(iii) $\forall a\in H,\ a+H=H+a$.

定义$\forall x,\ y\in G,\ x\leqslant y\Longleftrightarrow y-x\in H$，则

(1) $(G,+,\leqslant)$是半序群的充分必要条件是

$$H\cap(-H)=\{0\}.$$

(2) $(G,+,\leqslant)$是全序群的充分必要条件是

$$H\cap(-H)=\{0\},\ H\cup(-H)=G.$$

证 如果$(G,+,\leqslant)$是半序群，则H恰是其正元集，所以(1)和(2)的必要性显然成立. 下证充分性.

设$H\cap(-H)=\{0\}$．由(i) $0\in H$知，$\forall x\in G, x-x=0\in H$，所以$x\leqslant x$，即$\leqslant$具有反身性．

由(ii)$H+H\subseteq H$知，$\forall x, y, z\in G$，如果$x\leqslant y$，$y\leqslant z$，那么$y-x\in H$，$z-y\in H$，从而$(z-y)+(y-x)=z-x\in H$，于是$x\leqslant z$，即$\leqslant$具有传递性．

$\forall x, y\in G$，如果$x\leqslant y$且$y\leqslant x$，那么$y-x\in H$，$x-y\in H$，从而$-(x-y)=y-x\in -H$，但是$H\cap(-H)=\{0\}$，所以$y-x=0$，$x=y$，即$\leqslant$具有反对称性．

综上知$(G, \leqslant)$是偏序集．

易证$\forall a\in G$，$a+H=H+a$等价于$H=(-a)+H+a$．从而由(iii)可知，若$x\leqslant y$，$\forall a, b\in G$，有

$$
\begin{aligned}
&(a+y+b)-(a+x+b)\\
&=a+y+b-b-x-a\\
&=a+(y-x)-a\in H
\end{aligned}
$$

即 $a+x+b\leqslant a+y+b$．所以$(G, +, \leqslant)$是半序群．

若还有 $H\cup(-H)=G$，则$\forall x, y\in G$，由于$x-y\in G$，所以$x-y\in H$或者$x-y\in -H$，即$y\leqslant x$或$x\leqslant y$，于是$(G, +, \leqslant)$是全序群．∎

例3 在加群$Q\times Q$里，取定$a, b, c, d\in Q$，$ad-bc\neq 0$，令

$$H=\{(x, y)\mid ax+by\geqslant 0, cx+dy\geqslant 0\},$$

则H适合定理4中的(i)、(ii)和(iii)且$H\cap(-H)=\{(0,0)\}$，但$H\cup(-H)=Q\times Q$不成立．

半序群G称为**有向群**，如果G具有Moore-Smith性质：

$$\forall a, b\in G, \exists c\in G, 使a\leqslant c, b\leqslant c.$$

例4 在正有理数乘法群里，取自然数集为正元集，就得到一个有向群．而在正实数乘法群中，如取正元集同上，则它不是有向群，但是半序群．

定理5 半序群G是有向群的充分必要条件是G的每个元都是两正元之差．

证 设G是有向群，则任给$x\in G$，必有$c\in G$使得$x\leqslant c$，$0\leqslant c$，于是$x=c-(-x+c)$，且

$$-x+c=-x+(c-x)+x\geqslant -x+0+x=0.$$

反之，$\forall a$，$b\in G$，设$a=a_1-a_2$，$b=b_1-b_2$（a_1，a_2，b_1，b_2均是正元），取$c=a_1+b_1$，则$c\in G$且$a\leqslant c$，$b\leqslant c$． ▮

定理6 如果G是有向群，则它还是下有向的，即$\forall a$，$b\in G$．$\exists c\in G$使$c\leqslant a$，$c\leqslant b$．

证明留给读者． ▮

设$\{G_a\}$是一族半序群，在群积$G=\prod\limits_a G_a$中如下定义二元关系$\leqslant$：$(x_a)\leqslant(y_a)$当且仅当对任一a，$x_a\leqslant y_a$．这样G也成为半序群，称为**半序群G_a的积**．

半序群的**同态**定义为满足以下条件的两半序群G_1和G_2间的映射f：$G_1\longrightarrow G_2$：

(1) $\forall x$，$y\in G_1$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$；

(2) $\forall x$，$y\in G_1$，$x\leqslant y\Longrightarrow f(x)\leqslant f(y)$．

类似地，可以定义两半序群的反同态、同构、反同构以及两格群的同态、反同态、同构、反同构．

易见对任意半序群G，映射f：$a\mapsto -a$是G到自身的一个反同构，称作G的反自同构．由此知，若某元以$a=f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$（f是格多项式）表示，则它的逆元就是在该格多项式中，将a_i以$-a_i$换之，且$\vee$和$\wedge$互换所得的元．

定理7 在半序群里，下列关系式成立：

$$(1)\ \sup_{\alpha}\{y+x_\alpha\}=y+\sup_{\alpha}\{x_\alpha\};$$

$$(2)\ \inf_{\alpha}(-x_\alpha)=-\sup_{\alpha}\{x_\alpha\};$$

$$(3)\ \sup_{\alpha,\beta}\{x_\alpha+y_\beta\}=\sup_{\alpha}\{x_\alpha\}+\sup_{\beta}\{y_\beta\}.$$

其中等式(1)和(2)的意思是一边存在则另一边也存在，并且相等；(3)的意思是右边存在，则左边存在，并且相等.

证 (1)由$x\mapsto y+x$是同构可推出.

(2)由$x\mapsto -x$是反同构可推出.

(3)若有$z\geqslant x_\alpha+y_\beta$($\alpha$，$\beta$任意)，则

$$z\geqslant\sup_{\alpha}\{x_\alpha\}+y_\beta,$$

因而$z\geqslant\sup_{\alpha}\{x_\alpha\}+\sup_{\beta}\{y_\beta\}$. 反之，$\sup_{\alpha}\{x_\alpha\}+\sup_{\beta}\{y_\beta\}$是$x_\alpha+y_\beta$的上界，于是(3)式成立. ▌

格群G的子群H称为**正规子群**①，如果它满足下述条件：

若h_1，$h_2\in H$且$h_1\wedge h_2\leqslant x\leqslant h_1\vee h_2$，则$x\in H$.

$\forall a\in G$，记

$$H+a=\{h+a\mid h\in H\},\ (G/H)_r=\{H+a\mid a\in G\}.$$

引理1 $(G/H)_r$按照下式

$$(H+a)\vee(H+b)=H+(a\vee b),$$

$$(H+a)\wedge(H+b)=H+(a\wedge b)$$

定义运算"$\vee$"和"$\wedge$"，则$(G/H)_r$作成格，且f：$a\mapsto H+a$是G到$(G/H)_r$的格同态.

---

① 这里的正规子群不同于群论中的不变子群。

证 首先证明上面定义的运算与代表元的选取无关. 事实上, $\forall a,\ b\in G$, 当$h_1,\ h_2\in H$时, 有

$$(h_1\wedge h_2)+(a\vee b)\leqslant(h_1+a)\vee(h_2+b)$$
$$\leqslant(h_1\vee h_2)+(a\vee b),$$
$$h_1\wedge h_2\leqslant((h_1+a)\vee(h_2+b))-(a\vee b)\leqslant h_1\vee h_2,$$

所以
$$((h_1+a)\vee(h_2+b))-(a\vee b)\in H,$$
$$(h_1+a)\vee(h_2+b)\in H+(a\vee b),$$

由此易知, "$\vee$"运算与代表元的选取无关. 同理可证"$\wedge$"运算与代表元的选取也无关, 从而可以验证$(G/H)_r$是格, 至于f是G到$(G/H)_r$的格同态显然. ▌

定理8 如果H是格群G的正规不变子群, 则$(G/H)_r$是格群, 且f: $a\mapsto H+a$是G到$(G/H)_r$的格群同态.

证 由引理1, $(G/H)_r$作成格. 又由H是不变子群知$(G/H)_r$按照

$$(H+a)+(H+b)=H+(a+b)$$

定义的运算构成群. 因为

$$\begin{aligned}&((H+a)\vee(H+b))+(H+c)\\&=(H+(a\vee b))+(H+c)\\&=H+((a+b)+c)\\&=H+((a+c)\vee(b+c))\\&=(H+(a+c))\vee(H+(b+c))\\&=((H+a)+(H+c))\vee((H+b)+(H+c)),\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}&((H+a)\wedge(H+b))+(H+c)\\&=((H+a)+(H+c))\wedge((H+b)+(H+c)),\end{aligned}$$

所以$(G/H)_r$是格群. f显然是格群同态. ▌

定理9 如果f是格群G_1到格群G_2的格群同态，则

(1)$f^{-1}(0_2)=\{x \mid x\in G_1,\ f(x)=0_2\}$是正规不变子群，其中$0_2$是$G_2$的恒等元；

(2)当f是满射时，格群$(G_1/f^{-1}(0_2))_r$与G_2是同构的.

证 $f^{-1}(0_2)$是不变子群由群论中的知识可知. 又对任意的a，$b\in f^{-1}(0_2)$，若$a\wedge b\leqslant x\leqslant a\vee b$，则

$$f(a\wedge b)\leqslant f(x)\leqslant f(a\vee b),$$

$$f(a)\wedge f(b)\leqslant f(x)\leqslant f(a)\vee f(b),$$

$$0_2\wedge 0_2\leqslant f(x)\leqslant 0_2\vee 0_2,$$

即有$f(x)=0_2$，从而$x\in f^{-1}(0_2)$，故$f^{-1}(0_2)$是正规子群. 这样(1)得证，结论(2)显然成立. ∎

下面我们进一步研究格群的性质.

定理10 设G是格群. 如果G至少含有两个元，则它没有最大元和最小元.

证 用反证法. 假设G中有最大元，记为g，那么$g+g\geqslant g+0=g$，于是$g+g=g$，从而$g=0$.

这样$\forall a\in G$，由于$a\leqslant g=0$，所以$-a\geqslant 0$，从而$-a=0$，即$a=0=g$. 故有$G=\{0\}$，矛盾. 同理可证G没有最小元. ∎

定理11 格群是分配格.

证 设G是格群，欲证G是分配格，由§7.1中的定理1，只需证明$\forall a$，b，$c\in G$，若$a\vee b=a\vee c$，$a\wedge b=a\wedge c$，则$b=c$. 下证这一事实.

由于映射$t\mapsto b-t+a$是格群G的反自同构，所以有

$$b-(b\vee a)+a=(b-b+a)\wedge(b-a+a)=b\wedge a,$$

从而有 $b=(b\wedge a)-a+(b\vee a)$

$$=(c\wedge a)-a+(c\vee a)=c. \blacksquare$$

设$\{a_t \mid t\in T\}$为格群G中的一族元，且假定$\sup\{a_t \mid t\in T\}$存在，这时有较定理11更强的结论：$\forall a\in G$，有$\sup\{a\wedge a_t \mid t\in T\}$存在，且等于$a\wedge\sup\{a_t \mid t\in T\}$（$\wedge$-无限分配律），易证它的对偶命题也成立。

在定理1和2中，我们曾给出了半序群成为格群的条件，下面给出较弱的条件。

定理12 半序群G是格群的充分必要条件是：$\forall a\in G$，a与0在G中有上确界。

证 必要性显然，下证充分性。$\forall a, b\in G$，有

$$((a-b)\vee 0)+b=a\vee b,$$

所以G是并半格，从而G是格群。$\blacksquare$

同理可以证明：

定理13 半序群G是格群的充分必要条件是：$\forall a\in G$，a与0在G中有下确界。$\blacksquare$

在半序群中，对于任意元素a和b，映射$x\mapsto a-x+b$是反自同构。因此在任何格群中有：

$$a-(x\vee y)+b=(a-x+b)\wedge(a-y+b).$$

在上等式中，令$x=a$，$y=b$，我们得到：

$$a-(a\wedge b)+b=b\vee a.$$

因此，在交换格群G（即G是交换群和格群）中，有下面等式：

$$a+b=(a\vee b)+(a\wedge b) \quad (\forall a, b\in G).$$

设G是格群，$a\in G$，定义

$$a^+=a\vee 0, \quad a^-=a\wedge 0, \quad |a|=a\vee(-a).$$

a^+，a^-，$|a|$ 分别称为 a 的正部、负部和绝对值.

定理14 设G是格群，$a\in G$，则

(1) $a=a^++a^-$；

(2) $|a|\geqslant 0$，且$|a|=0\Longleftrightarrow a=0$；

(3) $a^+\wedge(-a)^+=0$；

(4) $|a|=a^+-a^-$.

证 (1)在等式$a-(a\wedge b)+b=b\vee a$中令$b=0$，则有 $a-a^-+0=a^+$，即$a=a^++a^-$.

(2)由于 $2(|a|\wedge 0)=2|a|\wedge|a|\wedge 0$，又有

$$|a|=a\vee(-a)\geqslant a\wedge(-a)\geqslant -|a|\Rightarrow 2|a|\geqslant 0,$$

所以 $2(|a|\wedge 0)=|a|\wedge 0\Rightarrow|a|\wedge 0=0\Rightarrow|a|\geqslant 0$.

若$a=0$，显然$|a|=0$；又若$|a|=0$，则$a\vee(-a)=a\wedge(-a)$，从而$a=-a$，于是

$$a=a\vee(-a)=|a|=0.$$

(3)由(2)知$a\wedge(-a)\leqslant 0$，于是

$$0=0\vee(a\wedge(-a))=(a\vee 0)\wedge((-a)\vee 0)$$
$$=a^+\wedge(-a)^+.$$

(4) 由于 $|a|=0\vee|a|\vee 0=(0\vee a)\vee((-a)\vee 0)=a^+\vee(-a)^+$，由(3)可得

$$a^+\vee(-a)^+=a^+-(a^+\wedge(-a)^+)+(-a)^+=a^++(-a)^+.$$

所以 $$|a|=a^++(-a)^+=a^+-a^-. \blacksquare$$

最后我们给出半序环和格环的定义.

设$(R,+,\cdot)$是环，$\leqslant$是R的一个二元关系. 如果$(R,+,\leqslant)$是半序群(格群)，并且满足：

$$\forall x,\ y\in R,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\Rightarrow xy\geqslant 0,$$

则称$(R,+,\cdot,\leqslant)$为**半序环(格环)**. 有时也简称R是半

序环(格环).

同半序群(格群)一样，半序环(格环)也有许多特殊的性质. 有兴趣的读者可查阅[1](Chap. 17).

练　习

1. 证明，若G是格群，则$\forall a, b, c\in G$，有

$$(a\vee b)+c=(a+c)\vee(b+c),$$
$$c+(a\vee b)=(c+a)\vee(c+b),$$
$$(a\wedge b)+c=(a+c)\wedge(b+c),$$
$$c+(a\wedge b)=(c+a)\wedge(c+b).$$

2. 证明格群是有向群.

3. 设G是半序群，$a\in G$且$a\geqslant 0$，$a\neq 0$，则对任意正整数n，$na\geqslant 0$，$na\neq 0$.

4. 设G是格群，$a, b, c\in G$，则

(1)$a\wedge b=0$，$a\wedge c=0\Rightarrow a\wedge(b+c)=0$；

(2)$a\vee b=0$，$a\vee c=0\Rightarrow a\vee(b+c)=0$.

5. 设G是格群，$a, b\in G$，若$a\wedge b=0$，则

$$a+b=b+a.$$

6. 证明定理6.

§10.2　分子格　F格

本节进一步讨论完全分配格以及F格，它们在拓扑分子格和格测度空间中起着重要的作用.

格L中的非零$\vee$-既约元称为**分子**.

例1　设$X\neq\varnothing$，$L=P(X)$，则$\forall x\in X$，单元集$\{x\}$是

L中的分子，且L中也只有这些分子。

例2 设$L=[0,1]^X (X\neq\varnothing)$. $\forall A\in L$，A可以看作是一个函数$A: X\to[0,1]$，记x_λ为在点$x\in X$处取值$\lambda\in[0,1]$而在X中其它点处均取值为零的函数，则L中的分子恰由这些x_λ组成.

在以上两个例子中我们可以看到：第一，L中任一元都可表示为若干个分子的并；第二，若一个分子小于或等于某二元之并，则必小于或等于其中之一. 这里第一条表明在上述两个格里分子是充分多的，多到可以用它们去表达任意一个元；第二条又表示这种分子是比较简单的，或粗略地讲，是比较小的(因为一个“大”的元可能包含于两个较小元的并之中而不包含于其中每一个元). 这两条合起来就表明分子在L中是起着基本单位的作用. 应注意分子不一定是最小的单位. 比如，例2的$x_{\lambda/2}$就是比x_λ更小的分子.

哪一种格中才有充分多的分子呢？从下面的定理1可知，完全分配格就是这种格. 所以，我们也称完全分配格为**分子格**.

定理1 设L是完全分配格，则L的每个元都可以表示为分子之并，且$\forall a\in L$，有

$$a=\bigvee\{x \mid x\leqslant a,\ x\text{是分子}\}.$$

该定理的证明读者可参见[6]和[8]的不同证明方法，这里从略. ∎

下面我们证明，一族分子格的积仍是分子格，这样我们可以从不同的完全分配格的简单实例通过积运算来构造出一些新的完全分配格.

定理2 设$\{L_t\}_{t\in T}$是一族完全分配格，这里T是非空指

标集，则它们的笛卡尔积$L=\prod_{t\in T}L_t$仍是完全分配格．（L中的序关系定义为：$\{a_t\}\leqslant\{b_t\}\Longleftrightarrow\forall t\in T,\ a_t\leqslant b_t$）

证 L中的元的一般形式是$a=\{a_t\}_{t\in T}$，这里a_t是a的第t个坐标．因为$\forall t\in T$，L_t是完全分配格，所以有

$$\bigwedge_{i\in I}\Big(\bigvee_{j\in J_i}(a_{i,j})_t\Big)=\bigvee\Big\{\bigwedge_{i\in I}(a_{i,f(i)})_t\,|\,f\in\prod_{i\in I}J_i\Big\},$$

$$\bigvee_{i\in I}\Big(\bigwedge_{j\in J_i}(a_{i,j})_t\Big)=\bigwedge_{i\in I}\Big\{\bigvee_{i\in I}(a_{i,f(i)})_t\,|\,f\in\prod_{i\in I}J_i\Big\},$$

而L中若干个元求上（下）确界的运算是通过它们的各坐标求上（下）确界来完成的，于是上面两式实际上说明

$$\Big(\bigwedge_{i\in I}\Big(\bigvee_{j\in J_i}a_{i,j}\Big)\Big)_t=\Big(\bigvee\Big\{\bigwedge_{i\in I}a_{i,f(i)}|f\in\prod_{i\in I}J_i\Big\}\Big)_t,$$

$$\Big(\bigvee_{i\in I}\Big(\bigwedge_{j\in J_i}a_{i,j}\Big)\Big)_t=\Big(\bigwedge\Big\{\bigvee_{i\in I}a_{i,f(i)}|f\in\prod_{i\in I}J_i\Big\}\Big)_t.$$

故L为完全分配格． ▮

下面讨论一种特殊的分子格——F格．

设L是完备格，$'$：$L\longrightarrow L$是L到自身的映射，如果

（1）$'$是对合对应，即$\forall a\in L$，$(a')'=a$；

（2）$'$是逆序对应，即$\forall a,\ b\in L$，$a\leqslant b$时有$b'\leqslant a'$；

则称$'$为L上的**逆序对合对应**，或简称为**逆合对应**．我们称具有逆合对应“$'$”的分子格为F格．F格在Fuzzy数学的研究中有着重要作用．

定理3 一族F格的笛卡尔积仍为F格．

证 设$\{L_t\}$是一族F格，由上面的定理2知它们的笛卡尔积$L=\prod_{t\in T}L_t$是完全分配格，即分子格．又对L中的任一元$a=$

$\{a_t\}_{t\in T}$，定义$a'=\{a_t'\}_{t\in T}$（这里$\forall t\in T$，a_t'是F格L_t中与元a_t按逆合关系相对应的元），显然它是L上的逆合对应，所以L是F格. ▌

例3 单位区间是F格，这里$\forall a\in[0, 1]$，$a'=1-a$.

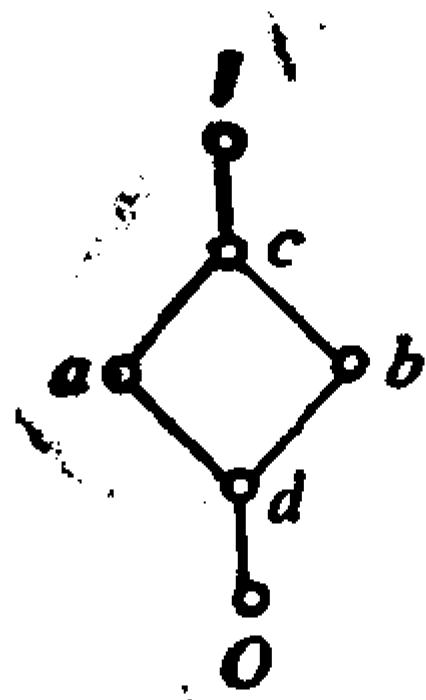


图 10.2.1

例4 左图表示的格是分子格，我们令O与I对应，d与c对应，a与b对应，则它是F格.

最后，我们研究广义序同态（GOH），它在拓扑分子格理论中充当了点集拓扑学中两个空间之间的一般映射的作用.

设L_1与L_2是分子格，f：$L_1\longrightarrow L_2$是映射，如果有：

(1) $f(O)=O$；

(2) f是保并映射，即$\forall\{a_i\mid i\in I\}\subseteq L_1$，有

$$f(\bigvee_{i\in I}a_i)=\bigvee_{i\in I}f(a_i);$$

(3) f^{-1}是保并映射，这里$\forall b\in L_2$，

$$f^{-1}(b)=\bigvee\{a\mid a\in L_1,\ f(a)\leqslant b\},$$

则称f为**广义序同态**（简记为GOH）.

例4 设$L_1=P(X)$，$L_2=P(Y)$，f：$X\to Y$是一映射，则f导出如下一个映射F：$P(X)\to P(Y)$：

$$F(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\qquad (A\in P(X)).$$

容易验证，F是GOH.

定理4 设f：$L_1\longrightarrow L_2$是GOH，则

(1) f与f^{-1}保序；

(2) $\forall a\in L_1$，$f^{-1}(f(a))\geqslant a$；

(3) $\forall b\in L_2$，$f(f^{-1}(b))\leqslant b$；

(4)设$a\in L_1$，$b\in L_2$，则$f(a)\leqslant b\Longleftrightarrow a\leqslant f^{-1}(b)$；

(5)$f(a)=\wedge\{b\mid b\in L_2,\ f^{-1}(b)\geqslant a\}\quad(a\in L_1)$；

(6)f^{-1}：$L_2\longrightarrow L_1$是保交映射.

证 (1)由f和f^{-1}是保并的即知f和f^{-1}是保序的.

(2)由f^{-1}的定义及$f(a)\leqslant f(a)$得：$a\leqslant f^{-1}(f(a))$.

(3)由f保并及$f^{-1}(b)$的定义得：

$$
\begin{aligned}
f(f^{-1}(b))&=f(\vee\{x\mid f(x)\leqslant b\})\\
&=\vee\{f(x)\mid f(x)\leqslant b\}\leqslant b.
\end{aligned}
$$

(4)设$f(a)\leqslant b$，则由$f^{-1}(b)$的定义得：$a\leqslant f^{-1}(b)$. 反过来，设$a\leqslant f^{-1}(b)$，则由f保序以及(3)得：

$$f(a)\leqslant f(f^{-1})(b)\leqslant b.$$

(5)$\forall a\in L_1$，由(4)得

$$
\begin{aligned}
f(a)&=\wedge\{b\mid f(a)\leqslant b,b\in L_2\}\\
&=\wedge\{b\mid f^{-1}(b)\geqslant a,b\in L_2\}.
\end{aligned}
$$

(6)$\forall a\in L_1$及$\{b_i\mid i\in I\}\subseteq L_2$，由(4)得

$$
\begin{aligned}
a\leqslant f^{-1}(\bigwedge_{i\in I}b_i)&\Longleftrightarrow f(a)\leqslant\bigwedge_{i\in I}b_i\\
&\Longleftrightarrow\forall i\in I,\ f(a)\leqslant b_i\\
&\Longleftrightarrow\forall i\in I,\ a\leqslant f^{-1}(b_i)\\
&\Longleftrightarrow a\leqslant\bigwedge_{i\in I}f^{-1}(b_i),
\end{aligned}
$$

因为a是任意的，特别可以取a为$\bigwedge_{i\in I}f^{-1}(b_i)$和$f^{-1}(\bigwedge_{i\in I}b_i)$，所以由此可得：

$$f^{-1}(\bigwedge_{i\in I}b_i)=\bigwedge_{i\in I}f^{-1}(b_i),$$

即f^{-1}是保交的. ▮

定理5 设f：$L_1\longrightarrow L_2$是GOH，$a\in L_1$是$\vee$-既约元，则$f(a)$是L_2中的$\vee$-既约元.

证 设$a\in L_1$，a是$\vee$-既约元，且$f(a)\leqslant b\vee c$，则

$$a\leqslant f^{-1}(b\vee c)=f^{-1}(b)\vee f^{-1}(c).$$

因为a是$\vee$-既约元，又L_1是分配格，所以有：

$$a\leqslant f^{-1}(b) \text{ 或 } a\leqslant f^{-1}(c),$$

从而$f(a)\leqslant b$或$f(a)\leqslant c$. 故$f(a)$是$\vee$-既约元. ▌

定理6 设f：$L_1\longrightarrow L_2$和g：$L_2\longrightarrow L_3$均是GOH，则合成映射$g\circ f$：$L_1\longrightarrow L_3$也是GOH.

证 $(g\circ f)(O)=O$及$g\circ f$保并显然. 又$\forall\{a_i\mid i\in I\}\subseteq L_1$，有

$$\begin{aligned}(g\circ f)^{-1}(\bigvee_{i\in I}a_i)&=\vee\{a\mid a\in L_1,(g\circ f)(a)\leqslant\bigvee_{i\in I}a_i\}\\&=\vee\{a\mid a\in L_1,g(f(a))\leqslant\bigvee_{i\in I}a_i\}\\&=\vee\{a\mid a\in L_1,\ f(a)\leqslant g^{-1}(\bigvee_{i\in I}a_i)\}\\&=f^{-1}(g^{-1}(\bigvee_{i\in I}a_i))=f^{-1}(\bigvee_{i\in I}g^{-1}(a_i))\\&=\bigvee_{i\in I}f^{-1}(g^{-1}(a_i))=\bigvee_{i\in I}(g\circ f)^{-1}(a_i),\end{aligned}$$

由此知$(g\circ f)^{-1}$是保并的，从而$g\circ f$是GOH. ▌

定理7 设广义序同态f：$L_1\longrightarrow L_2$是双射，则

(1)f保交；

(2)f^{-1}是双射且是广义序同态.

证明留给读者. ▌

实际上，在定理7中，本节定义的f的逆f^{-1}与通常意义下f的逆映射是一致的.

练　习

1. 设L具有逆序对合对应“$'$”，$A\subseteq L$，令$A'=\{a'\mid a\in A\}$. 试证：$\forall x\in L$，A是x的极大族当且仅当A'是a'的极小族.

2.举例说明，若f：$L_1 \to L_2$是GOH，则f未必保交.

3.设f：$L_1 \to L_2$是GOH. 试证：若B是a在L_1中的极小族，则$f(B)$是$f(a)$在L_2中的极小族.

4.设$'$：$L \to L$（L是完备格）是对合映射，则下列三条彼此等价：

(1) $(\bigvee\limits_{i\in T} a_i)' = \bigwedge\limits_{i\in T} a_i'$；

(2) $(\bigwedge\limits_{i\in T} a_i)' = \bigvee\limits_{i\in T} a_i'$；

(3) $'$是逆序对应.

§10.3 拓扑分子格

以Fuzzy拓扑与点集拓扑为背景，近年来逐渐形成了一个以研究某类格上的有点化拓扑为主旨的新理论，本节中简单介绍王国俊先生提出的拓扑分子格理论.

下面，以$L(M)$表示分子格L，M是L中所有分子组成的集合. 我们将用大写字母A，B，P，…来表示分子格$L(M)$中的任意元，而用小写字母a，b，m，…表示M中的元，并称它们为点，运算"$\vee$"和"$\wedge$"分别称为并和交运算. 若$A \leqslant B$，则称A含于B或B包含A. L中的最大元和最小元分别记为I和O.

设$L(M)$是分子格，$\eta \subseteq L$. η称为L上的**余拓扑**，如果

(1) O，$I \in \eta$；

(2) A，$B \in \eta \Longrightarrow A \vee B \in \eta$；

(3) $A_i \in \eta (i \in I) \Longrightarrow \bigwedge\limits_{i\in I} A_i \in \eta$.

这时$(L(M), \eta)$称为**拓扑分子格**，或简称为TML，η中的元称为**闭元**.

例1 (1)设(X, T)是拓扑空间①，则$P(X)$是分子格，$(P(X), T)$成为一TML.

(2) 设$(F(X), T)$是Fuzzy拓扑空间(其定义见文献[9])，则$F(X)$是分子格. 令$\eta=\{A'|A\in T\}$，则$(F(X), \eta)$是TML.

设$(L(M), \eta)$是TML，$a\in M$，$P\in\eta$且$a\nleqslant P$，则称P为a的**远域**. a的一切远域所成之集记为$\eta(a)$.

在例1(1)中，显然P是点a的远域当且仅当P'是a的开邻域.

设$(L(M), \eta)$是TML，$A\in L$，则L中一切包含A的闭元的交叫做A的**闭包**，记作A^-.

定理1 设$(L(M), \eta)$是TML，则

(1) $\forall A\in L$，$A\leqslant A^-$;

(2) $O^-=O$;

(3) $(A^-)^-=A^-$;

(4) $(A\vee B)^-=A^-\vee B^-$;

证明留给读者. ▌

设$(L(M), \eta)$是TML，$A\in L$，$a\in M$，称a为A的**附着点**，如果$\forall P\in\eta(a)$，$A\nleqslant P$. 如果a是A的附着点且$a\nleqslant A$，或$a\leqslant A$但对每个满足条件$a\leqslant b\leqslant A$的点$b\in M$都有$A\nleqslant b\vee P$，则称a是A的**聚点**. A的所有聚点之并叫A的**导元**，记为A^d.

$\forall a\in M$，因为$\forall P\in\eta(a)$有$O\leqslant P$，所以O没有附着点.

定理2 设$(L(M), \eta)$是TML，$A\in L$，$a\in M$，则

---

① 拓扑空间的定义见§3.6. 下文中的拓扑术语见文献[10].

(1) a是A的附着点$\Longleftrightarrow a\leqslant A^-$；

(2) $A^-=\bigvee\{a\mid a$是A的附着点$\}$；

(3) $A^-=A\vee A^d$；

(4) $(A^d)^-\leqslant A^-$.

证 (1) 由附着点及远域的定义得：

a是A的附着点$\Longleftrightarrow\forall P\in\eta(a)$，$A\not\leqslant P\Longleftrightarrow\forall P\in\eta$，$A\leqslant P$有$a\leqslant P\Longleftrightarrow a\leqslant A^-$.

(2) $A=O$时显然，下设$A\neq O$. 由§10.2定理1得：

$$A^-=\bigvee\{a\mid a\in M,\ a\leqslant A^-\}.$$

又由(1)得：

$$A^-=\bigvee\{a\mid a\text{是}A\text{的附着点}\}.$$

(3) $A\vee A^d\leqslant A^-$显然. 下证$A^-\leqslant A\vee A^d$.

如果$a\leqslant A^-$且$a\not\leqslant A$，则由聚点定义知$a\leqslant A^d$，从而$A^-\leqslant A\vee A^d$. 故有$A^-=A\vee A^d$.

(4) 由(3)知$A^-=A\vee A^d$，从而由定理1得

$$A^-=(A^-)^-=(A\vee A^d)^-=A^-\vee(A^d)^-,$$

故有 $(A^d)^-\leqslant A^-$. ∎

定理3 设$(L(M),\eta)$是TML，则$A\in\eta\Longleftrightarrow\forall a\not\leqslant A$，$\exists P\in\eta(a)$使$A\leqslant P$.

证 A是闭元$\Longleftrightarrow A^-=A\Longleftrightarrow A=A\vee A^d\Longleftrightarrow A^d\leqslant A\Longleftrightarrow\forall a\not\leqslant A$，$a$不是$A$的附着点$\Longleftrightarrow\forall a\not\leqslant A$，$\exists P\in\eta(a)$使$A\leqslant P$. ∎

设$L(M)$是分子格，D是有向集，S：$D\to M$是映射，则S叫做L中的**分子网**，记作$S=\{S(n)\mid n\in D\}$. 如果$\forall n\in D$，$S(n)\leqslant A$，则称S为A中的分子网.

设$(L(M),\eta)$是TML，$S=\{S(n)\mid n\in D\}$是分子网，

$a\in M$. a叫做S的**极限点**(或S收敛于a,记作$S\to a$),如果任意$P\in\eta(a)$,$S(n)\not\leqslant P$最终成立.a叫做S的**聚点**(或S聚于a,记作$S\infty a$),若$\forall P\in\eta(a)$,$S(n)\not\leqslant P$常常成立.S的一切极限点之并记作$\lim S$,S的一切聚点之并记作$\mathrm{ad}S$.

显然极限点一定是聚点,但反之不真.

定理4 (1)设$S=\{S(n)\mid n\in D\}$与$T=\{T(n)\mid n\in D\}$是同一定义域上的两个分子网,且$\forall n\in D$,$S(n)\leqslant T(n)$。若$S\to a(S\infty a)$,则$T\to a(T\infty a)$.

(2)若$S\to a(S\infty a)$且$b\leqslant a$,则$S\to b(S\infty b)$.

证明留给读者.▌

设$(L(M),\eta)$是TML,$\xi\subseteq\eta$,如果η的每个元都可以表示为ξ中元的交,则称ξ为η的**基**;$\zeta\subseteq\eta$,若ζ中元的有限并之集构成η的基,则称ζ为η的**子基**.

容易证明下面结论:

定理5 设$(L(M),\eta)$是TML,ξ和ζ分别是η的基和子基,S是分子网,$a\in M$,则

(1)$S\to a\Longleftrightarrow\forall P\in\eta(a)\cap\zeta$,$S$最终不在$P$中;

(2)$S\infty a\Longleftrightarrow\forall P\in\eta(a)\cap\xi$,$S$常常不在$P$中.

证明留给读者.▌

定理6 设$(L(M),\eta)$是TML,$A\in L$,$a\in M$,则

(1)如果A中有聚于a的分子网,则$a\leqslant A^-$;

(2)如果$a\leqslant A^-$,则A中有收敛于a的分子网.

证 (1)设$S=\{S(n)\mid n\in D\}$且$\forall n\in D$,$S(n)\leqslant A$.由$S\infty a$知:$\forall P\in\eta(a)$,$S(n)\not\leqslant P$常常成立,因此$A\not\leqslant P$,所以a是A的附着点.又从定理2得:$a\leqslant A^-$.

(2)首先证明$\eta(a)$是有向集.事实上,$\forall P,Q\in\eta(a)$,

有$P\vee Q\in\eta$，又从a是分子知$a\not\leqslant P\vee Q$，于是$P\vee Q\in\eta(a)$.

设　$a\leqslant A^-$，则$\forall P\in\eta(a)$，有点$S(P)$使$S(P)\leqslant A$并且$S(P)\not\leqslant P$. 令$S=\{S(P)|P\in\eta(a)\}$，则S是A中的分子网，显然有$S\to a$. ▌

由定理6可得：

推论1　设$(L(M),\ \eta)$是TML，$a\in M$，$A\in L$，那么$a\leqslant A^-\Longleftrightarrow A$中有收敛于$a$的分子网. ▌

设$(L_1(M_1),\eta_1)$和$(L_2(M_2),\eta_2)$均是TML，f：$L_1\to L_2$是GOH. 若$\forall Q\in\eta_2$，有$f^{-1}(Q)\in\eta_1$，则称f为**连续广义序同态**. 对于$a\in M_1$，若$\forall Q\in\eta_2(f(a))$，有$(f^{-1}(Q))^-\in\eta_1(a)$，则称$f$**在点$a$处连续**.

定理7　设f：$(L_1(M_1),\eta_1)\longrightarrow(L_2(M_2),\eta_2)$是GOH，则以下各条件等价：

(1) f连续；

(2) $\forall A\in L_1$，$f(A^-)\leqslant(f(A))^-$；

(3) $\forall B\in L_2$，$(f^{-1}(B))^-\leqslant f^{-1}(B^-)$.

证　(1)$\Longrightarrow$(2). 因为$f^{-1}((f(A))^-)$是闭元且

$$f^{-1}((f(A))^-)\geqslant f^{-1}(f(A))\geqslant A,$$

所以$f^{-1}((f(A))^-)\geqslant A^-$，从而$(f(A))^-\geqslant f(A^-)$.

(2)$\Longrightarrow$(3). 因为$f((f^{-1}(B))^-)\leqslant(f(f^{-1}(B)))^-\leqslant B^-$，所以有$((f^{-1}(B))^-\leqslant f^{-1}(B^-)$.

(3)$\Longrightarrow$(1). 设$Q\in\eta_2$，由(3)得　$(f^{-1}(Q))^-\leqslant f^{-1}(Q^-)=f^{-1}(Q)$，所以$f^{-1}(Q)=(f^{-1}(Q))^-\in\eta_1$. ▌

定理8　设f：$(L_1(M_1),\ \eta_1)\to(L_2(M_2),\ \eta_2)$是GOH，则$f$是连续的当且仅当对$\eta_2$的某子基$\zeta_2$，有

$$\forall Q\in\zeta_2,\quad f^{-1}(Q)\in\eta_1.$$

证明留作练习. ▌

定理9 设f: $(L_1(M_1), \eta_1) \to (L_2(M_2), \eta_2)$是GOH，则$f$是连续的当且仅当$\forall a \in M_1$，$f$在$a$处连续.

证 必要性. 设f是连续广义序同态，$a \in M_1$，则对任意$Q \in \eta_2(f(a))$，$f^{-1}(Q) \in \eta_1$，显然$a \not\leq f^{-1}(Q) = (f^{-1}(Q))^-$，所以$f^{-1}(Q) \in \eta_1(a)$，即$f$在$a$点连续.

充分性. 设$\forall a \in M_1$，f在a点连续. $\forall Q \in \eta_2$，不妨设$f^{-1}(Q) \neq I_{L_1}$且$a \not\leq f^{-1}(Q)$，则$f(Q) \leq Q$，从而$Q \in \eta_2(f(a))$. 于是$(f^{-1}(Q))^- \in \eta_1(a)$，即$a \not\leq f^{-1}(Q)$蕴含$a \not\leq (f^{-1}(Q))^-$，也即$(f^{-1}(Q))^- \leq f^{-1}(Q)$. 所以$f^{-1}(Q) \in \eta_1$. 这样就证明了$f$连续. ▌

定理10 设f: $(L_1(M_1), \eta_1) \to (L_2(M_2), \eta_2)$是GOH，则$f$在点$a \in M_1$处连续当且仅当若在$L_1$中的分子网$S$收敛于$a$，则必有$L_2$中的分子网$f(S) = \{f(S(n)) | n \in D\}$收敛于$f(a)$.

证 设f在a点处连续且$S \to a$，令$Q \in \eta_2(f(a))$，则S最终不在$(f^{-1}(Q))^-$中，因为$(f^{-1}(Q))^- \in \eta_1(a)$，那么$f(S)$最终不在$Q$中，故$f(S) \to f(a)$. 反之，设$f$不在$a$处连续，则有$Q \in \eta_2(f(a))$使$(f^{-1}(Q))^- \bar{\in} \eta_1(a)$，从而$a \not\leq (f^{-1}(Q))^-$. 这时$\forall P \in \eta_1(a)$，$f^{-1}(Q) \not\leq P$，因此有点$S(P) \leq f^{-1}(Q)$且$S(P) \not\leq P$. 这样就有分子网$S = \{S(P) | P \in \eta(a)\}$收敛于$a$，但$f(S)$不收敛于$f(a)$. ▌

设f: $(L_1(M_1), \eta_1) \to (L_2(M_2), \eta_2)$是GOH，称$f$为**闭**GOH，如果$\forall P \in \eta_1$，$f(P) \in \eta_2$；称$f$为**开**GOH，如果$\forall B \in L_2$以及$\forall A \in \eta_1$，当$f^{-1}(B) \leq A$时，存在$C \in \eta_2$使$B \leq C$且$f^{-1}(C) \leq A$.

容易证明闭(开)GOH的复合映射还是闭(开)GOH.

设f：$(L_1(M_1), \eta_1) \longrightarrow L_2(M_2)$是GOH且是满射．$L_2$上使$f$连续的最细余拓扑$\eta_2$叫做关于$f$的**商余拓扑**，这时$(L_2(M_2), \eta_2)$叫做**商**TML，$f$叫做**商**GOH.

定理11　设f：$(L_1(M_1), \eta_1) \longrightarrow L_2(M_2)$是GOH且是满射，则$L_2$上的余拓扑$\eta_2$是商余拓扑当且仅当

(1) $Q \in \eta_2 \Longrightarrow f^{-1}(Q) \in \eta_1$；

(2) $f^{-1}(Q) \in \eta_1 \Longrightarrow Q \in \eta_2$.

证　(1)和(2)合起来等于说$\eta_2 = \{Q \mid Q \in L_2, f^{-1}(Q) \in \eta_1\}$．而易证$\eta_2$是$L_2(M_2)$上的余拓扑，并且是使$f$连续的最细的余拓扑．∎

拓扑分子格的理论框架中，闭元是核心概念，未提及开元，而在前面纯粹用闭元定义了开GOH概念．若$L_1 = P(X)$，$L_2 = P(Y)$，则开GOH确实把开元映成开元，而从下面的定理12可以看出，开GOH在讨论商GOH概念时的表现确实与一般拓扑学中的开映射相当.

定理12　设f:$(L_1(M_1), \eta_1) \rightarrow (L_2(M_2), \eta_2)$是满GOH.

(1)若f连续且是闭的GOH，则f是商GOH；

(2)若f连续且是开的GOH，则f是商GOH.

证　(1)因为f连续，$\forall Q \in \eta_2$，$f^{-1}(Q) \in \eta_1$．反之，若$f^{-1}(Q) \in \eta_1$，则由f是闭的满射，$Q = f(f^{-1}(Q)) \in \eta_2$.

(2)只需证明若$f^{-1}(Q) \in \eta_1$，则$Q \in \eta_2$．事实上，因为f是开的，$f^{-1}(Q)$是闭元且$f^{-1}(Q) \leqslant A = f^{-1}(Q)$，故有闭元$B$使$Q \leqslant B$并且$f^{-1}(B) \leqslant A = f^{-1}(Q)$，于是从$Q \leqslant Q^{-} \leqslant B$得知$f^{-1}(Q^{-}) \leqslant f^{-1}(B) \leqslant f^{-1}(Q)$，故：$Q^{-} = f(f^{-1}(Q^{-})) \leqslant f(f^{-1}(Q)) = Q$,所以$Q \in \eta_2$．∎

关于拓扑分子格的理论（如可数性、可分性、连通性、收敛

类及拟一致结构等)有着丰富的内容．有兴趣的读者可参阅文献[5]，[6].

练　习

1. 设$(L(M),\ \eta)$是TML，$a\in M$. 证明

(1) 若$P,Q\in\eta(a)$，则$P\vee Q\in\eta(a)$；

(2) 若$P\in\eta(a)$，$Q\in\eta$且$Q\leqslant P$，则$Q\in\eta(a)$.

2. 证明定理8(利用f^{-1}的保并和保交性).

3. 证明闭(开)GOH的复合映射仍是闭(开)GOH.

§10.4 格测度空间

无论是经典的测度，还是近年来在Fuzzy数学中出现的Fuzzy测度，其可测空间实质上都是F格的一个子集，自然地可以考虑格上的测度空间.

本节恒设L是F格．称L中的元a和b是**不相交**的，如果$a\wedge b=O$．记$L^+=\{a\mid a\in L,\ a\wedge a'=O\}$.

首先来探讨一下F格L的非空子集关于运算$\vee$、$\wedge$、$'$所构成的几种封闭结构.

称L的一个非空子集A为L上的**格代数**，如果(1) $O\in A$；(2) $a\in A\Longrightarrow a'\in A$；(3) $a,\ b\in A\Longrightarrow a\vee b\in A$.

容易证明，若A为格代数，则

(i) $I\in A$，且可以等价地代换定义中的条件(1).

(ii) $a,\ b\in A\Longrightarrow a\wedge b\in A$，且可以等价地代换定义中的条件(3).

称L的非空子集A为L上的σ-**格代数**，如果(1) $O\in A$；

(2) $a\in A\Longrightarrow a'\in A$; (3) $a_n\in A(n=1,2,\cdots)\Longrightarrow\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n\in A$.

显然，若A是σ－格代数，则它也是格代数，但反之不真. 定义中的条件(3)可以等价地换为A对可列交封闭.

例1 设$X\neq\varnothing$，$P(X)$按集合论中的并、交，补运算成为F格，并且集合论中的σ-代数就是这里定义的σ-格代数.

定理1 设$A\subseteq L^{\perp}$，则A为σ-格代数当且仅当A为格代数且对不交可列并封闭.

证明留给读者. ▮

如果A是L上的σ-格代数，则称二元组(L, A)为**格可测空间**. 设(L, A)是格可测空间，$\mu: A\longrightarrow[0, +\infty]$是一个映射，称$\mu$是**格测度**，如果：

(1) $\mu(O)=0$；

(2) μ是单调的，即$\forall a, b\in A$. $a\leqslant b$，有$\mu(a)\leqslant\mu(b)$；

(3) μ是格可加的，即$\forall a, b\in A$，

$$\mu(a\vee b)+\mu(a\wedge b)=\mu(a)+\mu(b);$$

(4) μ是下连续的，即$\forall a_n\in A$，$a_n\leqslant a_{n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(a_n)=\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)$.

此时，称三元组(L, A, μ)为**格测度空间**. 若还有$A\subseteq L^{\perp}$，则称(L, A, μ)为**正常格测度空间**.

例2 设L是具有有限长的F格，则L满足Jordan-Dedekind链条件. 取$A=L$，$\forall a\in L$，定义$\mu(a)$等于O与a之间极大链的长度，则(L, A, μ)是格测度空间.

定理2 设(L, A, μ)是格测度空间，则

(1) μ是可列可加的，即$\forall a_n\in A(n=1, 2, \cdots)$，$a_i\wedge a_j$

$=O\ (i\neq j)$，有$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(a_n)$；

(2) μ是半可列可加的，即$\forall a_n\in A(n=1,\ 2,\ \cdots)$，

$$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(a_n).$$

证 仅证(1)，(2)同理可证.

由μ是格可加的易知μ是有限可加的．设$a_n\in A(n=1,\ 2,\ \cdots)$，$a_i\wedge a_j=O(i\neq j)$，令$b_n=\bigvee_{i=1}^{n}a_i(n=1,\ 2,\ \cdots)$，则$b_n\leqslant b_{n+1}$且$\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n=\bigvee_{n=1}^{\infty}b_n$.

由μ的有限可加性得：

$$\mu(b_n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(a_i)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

于是从μ的下连续性得

$$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)=\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty}b_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(b_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(a_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(an)\qquad\blacksquare$$

由定理2知可，格测度空间是经典的测度空间的自然推广.

定理3 设$(L,\ A,\ \mu)$是格测度空间，$\mu(a_n)=0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$，则$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)=0$.

证明留作练习. ■

设$(L,\ A,\ \mu)$是格测度空间，$n\in L$，称n为**可略元**，如果存在$a\in A$使$\mu(a)=0$且$n\leqslant a$。记L中全体可略元所成的集合为N．如果$N\subseteq A$，则称μ为**完备格测度**。

一般地，格测度不一定是完备的，这由经典的测度理论可便知道。但当$N\subseteq L^{\perp}$时，可以对格测度空间进行扩张，使扩张后的测度是完备的．下面的定理4给出了扩张和完备化的具体方法。

定理4 设(L, A, μ)是格测度空间且$N\subseteq L^{\perp}$，令

$$\bar{A}=\{a\vee n \mid a\in A, n\in N\},$$

对于$\bar{A}$中的每一元$x=a\vee n(a\in A, n\in N)$，定义$\bar{\mu}(x)=\mu(a)$，则

(1) $A\subseteq\bar{A}$；

(2) $(L, \bar{A}, \bar{\mu})$是格测度空间；

(3) $\bar{\mu}$是完备格测度，且$\forall a\in A$，$\bar{\mu}(a)=\mu(a)$。

证 (1)显然$O\in N$，从而$A\subseteq\bar{A}$.

(2)首先证$\bar{A}$是σ-格代数.

设$x_n\in\bar{A}(n=1, 2, \cdots)$，则存在$a_n$，$b_n\in A$，$m_n\in N(n=1, 2, \cdots)$，使

$x_n=a_n\vee m_n$，$m_n\leqslant b_n$，$\mu(b_n)=0$ $(n=1, 2, \cdots)$，由关系式

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}x_n=\bigvee_{n=1}^{\infty}(a_n\vee m_n)=(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)\vee(\bigvee_{n=1}^{\infty}m_n),$$

$$\bigvee_{n=1}^{\infty}m_n\leqslant\bigvee_{n=1}^{\infty}b_n,$$

及$\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n$，$\bigvee_{n=1}^{\infty}b_n\in A$，$\mu(\bigvee_{n=1}^{\infty}b_n)=0$得：$\bigvee_{n=1}^{\infty}x_n\in\bar{A}$.

又对$x\in\bar{A}$，不妨设$x=a\vee n$，$a\in A$，$n\leqslant b$，$\mu(b)=0$。由关系式

$$x'=(a\vee n)'=(a\vee n)'\wedge(b\vee b')$$

$$=(a\vee b)'\vee(b\wedge(a\vee n)')$$

及$(a\vee b)'\in A$，$b\wedge(a\vee n)'\in N$得知$x'\in A$. 这样就证明了$\bar{A}$为σ-格代数. 下面证明$\bar{\mu}$是格测度.

显然$\bar{\mu}$有意义并且是非负的. 设x，$y\in\bar{A}$，不妨令$x=a\vee n$，$y=b\vee m$，其中a，$b\in A$，$n\leqslant c$，$m\leqslant c$，$c\in A$，$\mu(c)=0$. 因为

$$x\vee c=a\vee c,\quad y\vee c=b\vee c,$$

所以，若$x\leqslant y$，则$a\vee c\leqslant b\vee c$. 于是

$$\bar{\mu}(x)=\mu(a)=\mu(a\vee c)\leqslant\mu(b\vee c)=\mu(b)=\bar{\mu}(y),$$

故$\bar{\mu}$是单调的，又从

$$x\vee y=(a\vee b)\vee(m\vee n),$$

$$x\wedge y=(a\wedge b)\vee((a\wedge m)\vee(n\wedge(b\vee m)))$$

及$a\vee b$，$a\wedge b\in A$，$m\vee n$，$((a\wedge m)\vee(n\wedge(b\vee m)))\in N$得：

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(x\vee y)+\bar{\mu}(x\wedge y)&=\mu(a\vee b)+\mu(a\wedge b)\\&=\mu(a)+\mu(b)\\&=\bar{\mu}(x)+\bar{\mu}(y),\end{aligned}$$

故$\bar{\mu}$是格可加的.

仿上证法同样可得$\bar{\mu}$是下连续，这样便知$\bar{\mu}$是格测度.

(3) $\forall a\in A$，显然有$\bar{\mu}(a)=\mu(a)$.

设$x\leqslant a\vee n$，$\bar{\mu}(a\vee n)=\mu(a)=0$，其中$n\leqslant b$，$a$，$b\in A$，$\mu(b)=0$. 因为$x\leqslant a\vee b$且$\mu(a\vee b)=0$，所以，$x\in N$，从而$x=O\vee x\in\bar{A}$且$\bar{\mu}(x)=0$. 这即证明了$\bar{\mu}$为完备格测度. ▌

设(L_1, A_1, μ_1)和(L_2, A_2, μ_2)都是格测度空间，称(L_1, A_1, μ_1)与(L_2, A_2, μ_2)是**可测同态**的，如果存在映射$f: A_1\to A_2$，使得

(1) $\forall a\in A_1$，$\mu_1(a)=\mu_2(f(a))$；

(2) $\forall a\in A_1$， $f(a')=(f(a))'$；

(3) $\forall a_n\in A_1\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$， $f(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)=\bigvee_{n=1}^{\infty}f(a_n)$.

如果f还是双射，则称$(L_1,\ A_1,\ \mu_1)$与$(L_2,\ A_2,\ \mu_2)$是**可测同构**的.

易证可测同态具有自反性和传递性. 对于任意给定的格测度空间族，这一族中的格测度空间之间的可测同构关系是一个等价关系.

记M为F格L的分子集，$\forall a\in L$，令$M(a)=\{x\mid x\in M,\ x\leqslant a\}$. 显然$\bigvee M(a)=a$， $a\wedge b=O\Longleftrightarrow M(a)\cap M(b)=\varnothing$，且$a\leqslant b\Longleftrightarrow M(a)\subseteq M(b)$.

设L是分子格，$a\in L-\{O\}$，称a为**$\sigma\vee$-既约元**，如果$a\leqslant\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n$，则存在$m$使$a\leqslant a_m$；称$a$为**全$\vee$-既约元**，如果$a\leqslant\bigvee_{t\in T}a_t$，则存在$m\in T$使$a\leqslant a_m$；称$a$为**紧元**，若有子集$A\subseteq L$，使$a\leqslant\bigvee A$，则存在有限子集$A_0\subseteq A$，使$a\leqslant\bigvee A_0$.

利用完全分配性，上定义中的“$\leqslant$”号可以等价地换为“$=$”号.

显然，a是全$\vee$-既约元$\Longrightarrow a$是$\sigma\vee$-既约元$\Longrightarrow a$是$\vee$-既约元；a是全$\vee$-既约元$\Longleftrightarrow a$是紧元又是$\vee$-既约元.

引理1 设$f:L\longrightarrow P(M)$

$$a\mapsto M(a)$$

则有：

(1) f是单射；

(2) $\forall a\in L^{\perp}$， $f(a')=M-f(a)$；

(3) $f(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f(a_n)$；

(4)若M中的元均是$\sigma\bigvee$-既约元，则

$$f(\bigvee_{n=1}^{\infty}a_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f(a_n).$$

(5)若M中的元均是紧元，则对任一指标集Γ有：

$$f(\bigvee_{n\in\Gamma}a_n)=\bigcup_{n\in\Gamma}f(a_n).$$

证 (1)显然成立.

(2) $\forall a\in L^{\perp}\Longrightarrow\forall x\in M$，$x\leqslant I=a\vee a'\Longrightarrow x\leqslant a$或$x\leqslant a'\Longrightarrow x\in f(a)$或$x\in f(a')$；又若$x\in f(a)\cap f(a')\Longrightarrow x\leqslant a$且$x\leqslant a'\Longrightarrow x\leqslant a\wedge a'=O\Longrightarrow x=O$. 由此得$f(a')=M-f(a)$.

(3)显然 $\bigcup_{n=1}^{m}f(a_n)\subseteq f(\bigvee_{n=1}^{m}a_n)$. 又

$\forall x\in f(\bigvee_{n=1}^{m}a_n)\Longrightarrow x\in M$，$x\leqslant\bigvee_{n=1}^{m}a_n\Longrightarrow$存在$i$使$x\leqslant a_i\Longrightarrow x\in f(a_i)\subseteq\bigcup_{n=1}^{m}f(a_n)\Longrightarrow f(\bigvee_{n=1}^{m}a_n)\subseteq\bigcup_{n=1}^{m}f(a_n)$. 故

$$\bigcup_{n=1}^{m}f(a_n)=f(\bigvee_{n=1}^{m}a_n).$$

(4)和(5)仿(3)可证. ▮

引理2 若L的分子又是原子和紧元，f同引理1中所定义，则f是双射.

证 f是单射由引理1已知，下证f是满射.

设$A\in P(M)$，令$a=\bigvee A$，显然$M(a)\supseteq A$；又如果$x\in M(a)$. 则$x\in M$且$x\leqslant\bigvee A$. 由x是原子和紧元可知$x\in A$，故$M(a)\subseteq A$，这样就有$M(a)=A$，即$f(a)=A$，所以f是满射.▮

定理5 设F格L的分子均是$\sigma\bigvee$-既约元，则L上的每一个正常格测度空间(L, A, μ)与$P(M)$上的一个格测度空间，即M上的一个经典的测度空间是可测同态的.

证 映射f同引理1中所定义的. 令

$$S=\{M(a)\mid a\in A\},\ \nu(M(a))=\mu(a)\quad(a\in A).$$

由引理1易证，(M, S, ν)是测度空间，显然在映射f下(L, A, μ)与(M, S, ν)是可测同态的. ∎

从引理1和定理5易得：

定理6 设F格L的分子既是原子又是紧元，则L上的每一个正常格测度空间与M上的一个测度空间是可测同构的. ∎

$\forall a\in L$，令$\beta(a)$表示a的最大极小族，又记

$$\beta^*(a)=\bigcup\{M(x)\mid x\in\beta(a)\}.$$

仿定理5的证明可得：

定理7 每一个正常格测度空间与$\beta^*(I)$上的一个测度空间是可测同态的. ∎

对于有限格测度空间(L, A, μ)，即$\forall a\in A$，$\mu(a)<+\infty$，定义

$$d(x, y)=\mu(x\vee y)-\mu(x\wedge y)\quad(x, y\in A).$$

由μ的单调性，易知d是$A\times A\longrightarrow[0, +\infty)$的映射.

引理3 设(L, A, μ)是有限格测度空间，则$\forall x, y, z, a\in A$，有

(1) $d(x, x)=0$;

(2) $d(x, y)=d(y, x)$;

(3) $d(a\vee x, a\vee y)+d(a\wedge x, a\wedge y)=d(x, y)$;

(4) $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$.

证 (1)和(2)显然.

(3) $d(a\vee x, a\vee y)+d(a\wedge x,\ a\wedge y)$

$=\mu(a\vee x\vee y)-\mu(a\vee(x\wedge y))$

$\quad+\mu(a\wedge(x\vee y))-\mu(a\wedge x\wedge y)$

$=\mu(a)+\mu(x\vee y)-(\mu(a)+\mu(x\wedge y))$

$=\mu(x\vee y)-\mu(x\wedge y)$

$=d(x,\ y)$.

(4)由(3)得

$d(x,\ y)+d(y,\ z)$

$=d(x\vee y, y)+d(y, x\wedge y)+d(y\vee z, y)+d(y, y\wedge z)$

$\geqslant d(x\vee y\vee z,\ y\vee z)+d(y,\ x\wedge y)$

$\quad+d(y\vee z,\ y)+d(y\wedge x,\ y\wedge z\wedge x)$

$=\mu(x\vee y\vee z)-\mu(y\wedge z\wedge x)$

$\geqslant\mu(x\vee z)-\mu(x\wedge z)$

$=d(x,\ y)$. ▌

从引理3可得

定理8 设$(L,\ A,\ \mu)$是有限格测度空间，则$(A,\ d)$是伪度量空间. ▌

称格测度μ为正格测度，如果μ是严格单调的，即当$a\leqslant b$，$a\neq b$时有$\mu(a)<\mu(b)$.

定理9 设$(L,\ A,\ \mu)$是有限格测度空间，且μ是正格测度，则$(A,\ d)$是度量空间.

证 只需证明$d(a,\ b)=0\Rightarrow a=b$. 用反证法证之. 若$a\neq b$，则$a\wedge b\neq a\vee b$，从而由$\mu$是正格测度得

$$d(a,\ b)=\mu(a\vee b)-\mu(a\wedge b)>0,$$

矛盾，故$a=b$. ▌

定理10 设$(L,\ A,\ \mu)$是有限格测度空间，则在伪度量

空间(A, d)中，并和交运算是一致连续的.

证 $\forall a, b, c, e \in A$，由关系式

$$
\begin{aligned}
& d(a\vee b,\ c\vee e)+d(a\wedge b,\ c\wedge e)\\
\leqslant & d(a\vee b,\ c\vee b)+d(c\vee b,\ c\vee e)\\
& +d(a\wedge b,\ c\wedge b)+d(c\wedge b,\ c\wedge e)\\
\leqslant & d(a,\ c)+d(b,\ e)
\end{aligned}
$$

便知，并和交运算是一致连续的. ▌

对于有限格测度空间(L, A, μ)，在A中定义二元关系"$\sim$"如下：

$$a\sim b \Longleftrightarrow d(a,\ b)=0\ .$$

从引理3和定理10证明中易知关系"$\sim$"对于并和交是A上的同余关系.

一般地，由有限格测度空间(L, A, μ)所诱导出的(A, d)并非是度量空间，但可由(A, d)来建立一个度量空间，且基本上保持原空间的性质.

令A^*表示A对于关系"$\sim$"的商集$A/\sim$，a^*表示a的等价类，定义d^*如下：

$$d^*(a^*,\ b^*)=d(a,\ b) \qquad (a^*,\ b^*\in A^*)$$

容易证明d^*是A^*到$[0, +\infty)$的映射.

定理11 设(L, A, μ)是有限格测度空间，则(A^*, d^*)是度量空间，且变换$T: a\mapsto a^*$是A到A^*的等距变换.

证 为证(A^*, d^*)是度量空间，只需证当$a^*\neq b^*$时，有$d(a^*, b^*)>0$.

若$a^*\neq b^*$，则a与b不具有关系$\sim$，即$d(a, b)>0$，从而$d^*(a^*, b^*)=d(a, b)>0$. T显然是等距变换. ▌

定理12 设有限格测度空间(L_1, A_1, μ_1)与$(L_2, A_2,$

μ_2)在映射 f 下是可测同态的，则 f 是(A_1, d_1)到(A_2, d_2)的等距变换。

证 $\forall a,\ b\in A_1$，由f是可测同态得：

$$f(a\vee b)=f(a)\vee f(b),$$

$$f(a\wedge b)=f((a'\vee b')')=(f(a'\vee b'))'$$
$$=((f(a))'\vee(f(b))')'$$
$$=f(a)\wedge f(b),$$

于是 $d_2(f(a),\ f(b))=\mu_2(f(a)\vee f(b))-\mu_2(f(a)\wedge f(b))$

$$=\mu_2(f(a\vee b))-\mu_2(f(a\wedge b))$$
$$=\mu_1(a\vee b)-\mu_1(a\wedge b)$$
$$=d_1(a,\ b)$$

故f是等距变换。▌

练　习

1. 证明定理3.

2. 证明$L^{\perp}$是σ-格代数。

3. 设(L_1, A_1, μ_1)和(L_2, A_2, μ_2)都是正常格测度空间。如果$f: A_1\longrightarrow A_2$是双射，且

(1) $\forall a\in A_1, \mu_1(a)=\mu_2(f(a))$；

(2) $\forall a\in A_1, f(a')=(f(a))'$；

(3) $\forall a,\ b\in A_1,\ f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)$，

证明这两个格测度空间是可测同构的。

4. 设(L_1, A_1, μ_1)与(L_2, A_2, μ_2)是可测同态的。如果(A_2, d_2)是度量空间，证明(A_1, d_1)也是度量空间。

参 考 文 献

1 Birkhoff G. Lattice Theory. 3nd ed. New York: American Mathematical Society, 1967

2 Helmuth Gericke. Lattice Theory. London: Toronto Wellington Sydney, 1966

3 Raney G. N. Proc. AMS, 1952(3): 677—680, 1953(4): 518—522

4 王国俊. 论 Fuzzy 格之构造, 数学学报, 1986(4): 539—543

5 Whitman P. Free Lattice Ⅱ. Annals of Math., 1942(43): 104—115

6 王国俊. 完全分配格上的点式拓扑(Ⅰ). 陕西师大学报, 1985(1): 1—17

7 王国俊. 完全分配格上的点式拓扑(Ⅱ). 陕西师大学报, 1985(2): 1—15

8 Gierg G. A Compendium of Continuous Lattices. Springer-Verlag, 1980

9 王国俊. L-fuzzy拓扑空间论. 西安: 陕西师大出版社, 1988

10 (美)J. L. 凯莱. 一般拓扑学. 吴从炘等译, 北京: 科学出版社, 1982

11 (日)中山 正. 格论. 董克诚译, 上海: 上海科技出版社, 1964

名词索引

（以下按音序排列）

C

D

M

N

P

Q

S

T

V

W

Z

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝格论基础
作者＝胡长流，宋振明编
页数＝３１７
ＳＳ号＝１００６９００２
出版日期＝

目录
正文